Elaborazione numerica dei segnali
Generalità sui filtri numerici

INTRODUZIONE

*Il termine **filtro** è usato per descrivere un dispositivo che discrimina, in accordo ad alcune caratteristiche degli oggetti applicati in ingresso, cosa può passare attraverso di esso e cosa no.* Per fare un esempio concreto, nel campo della fotografia un *filtro ultravioletto* è spesso usato per evitare che la luce ultravioletta, che è presente nella luce solare ma non è visibile, passi attraverso la macchina e determini effetti chimici indesiderati sul film.

Nel campo nei segnali (analogici o digitali), un **sistema lineare tempo-invariante** è in grado di effettuare una discriminazione o un filtraggio tra le varie componenti di frequenza al suo ingresso. La natura di questa azione di filtraggio è determinata dalle caratteristiche della risposta in frequenza H(ω) del filtro, la quale a sua volta dipende dalla scelta dei parametri del sistema (ad esempio, i coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ che compaiono nell'equazione differenziale che lega l'ingresso e l'uscita, nel dominio del tempo, del sistema stesso). Quindi, tramite una appropriata scelta dei coefficienti, possiamo progettare **filtri selettivi in frequenza** che lasciano passare segnali con componenti spettrali in determinate bande mentre attenuano segnali contenenti componenti spettrali in altre bande.

In generale, un sistema lineare tempo-invariante modifica lo spettro X(ω) del segnale in ingresso in accordo alla propria funzione di trasferimento (o risposta in frequenza) H(ω): lo spettro del segnale di uscita è quindi **Y(ω)=H(ω)X(ω)**, il che indica sostanzialmente che H(ω) è una **funzione peso** per le diverse componenti spettrali del segnale in ingresso. Visto in questo senso, ogni sistema lineare tempo-invariante può essere visto come un **filtro**, anche se non necessariamente esso blocca del tutto determinate frequenze lasciandone passare delle altre. Di conseguenza, i *termini "sistema lineare tempo-invariante" e "filtro" sono praticamente dei sinonimi e vengono spesso confusi.*

In generale, noi definiamo **filtro** un sistema lineare tempo-invariante usato per ottenere una determinata <u>sagomatura spettrale</u> o un <u>filtraggio selettivo in frequenza</u>.

CARATTERISTICHE DEI FILTRI IDEALI

I filtri sono generalmente classificati a seconda delle caratteristiche della loro funzione di trasferimento H(ω): abbiamo perciò filtri **passa-basso**, **passa-alto**, **passa-banda**, **arresta-banda** e **passa-tutto**. Le caratteristiche ideali del modulo di H(ω) per questo tipo di filtri sono ben note: per quanto riguarda il modulo di H(ω), diciamo sostanzialmente che tali filtri ideali hanno guadagno costante (generalmente unitario) nella banda passante e guadagno nullo nella banda arrestata.

Oltre al modulo, è importante la **caratteristica di fase Θ(ω)** della funzione di trasferimento di un filtro:

$$H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\Theta(\omega)}$$

In particolare, *è sempre opportuno (tranne che in particolari applicazioni che in questa sede non ci interessano) che il filtro abbia una caratteristica di fase lineare, almeno della banda passante.* Questo significa che, almeno in banda passante, deve risultare

$$\boxed{\Theta(\omega)=-k\cdot\omega}$$

dove k è un numero reale positivo qualsiasi.

Per capire l'importanza di una fase lineare, consideriamo un segnale tempo-discreto **x(n)** che abbia componenti spettrali limitatamente all'intervallo $[\omega_1,\omega_2]$ e supponiamo di inviare tale segnale in ingresso ad un filtro passa-banda ideale di banda proprio $[\omega_1,\omega_2]$. Questo significa che la funzione di trasferimento del filtro è la seguente:

$$H(\omega)=\begin{cases} Ce^{-jn_0\omega} & \omega_1\le\omega\le\omega_2 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Il filtro ha dunque modulo costante e fase lineare in banda passante, mentre è identicamente nullo (in modulo e fase) nella banda arrestata. I termini C ed n_0 sono delle costanti.

Dato che il segnale in ingresso ha una banda corrispondente alla banda passante del filtro, il segnale di uscita sarà

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=Ce^{-jn_0\omega}X(\omega) \qquad \omega_1\le\omega\le\omega_2$$

Se antitrasformiamo secondo Fourier questo spettro e applichiamo la *proprietà di ritardo nel tempo*, deduciamo facilmente che la sequenza di uscita è

$$y(n)=Cx(n-n_0)$$

Tale uscita è quindi semplicemente una versione scalata e ritardata dell'ingresso. La costante C non dà alcun problema se non è troppo piccola; anche il ritardo temporale è generalmente tollerabile e non è considerato come una distorsione sul segnale.

Se la fase del filtro non fosse stata lineare, ma avesse avuto una dipendenza non lineare da ω, l'uscita y(n) sarebbe stato qualcosa di più complicato rispetto ad $x(n-n_0)$, ossia sarebbe stata una versione più o meno distorta dell'ingresso.

Notiamo anche un'altra cosa: calcoliamo la derivata, rispetto ad ω, della caratteristica di fase $\Theta(\omega) = -k \cdot \omega$ del filtro; otteniamo evidentemente

$$\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega} = -k$$

Questa derivata, cambiata di segno, prende il nome di **ritardo di gruppo** introdotto dal filtro sul segnale di ingresso:

$$\tau_g = -\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega} = k$$

Nel caso di un filtro a fase lineare, come si è visto, il ritardo di gruppo risulta costante. In generale, invece, si tratta di una quantità funzione di ω:

$$\boxed{\tau_g(\omega) = -\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega}}$$

Il ritardo di gruppo introdotto dal filtro si può interpretare come il ritardo temporale che ciascuna componente spettrale (sinusoidale) del segnale subisce quando passa dall'ingresso all'uscita del filtro stesso. Quindi, dire che il ritardo di gruppo è costante (come appunto nel caso dei filtri a fase lineare) significa dire che tutte le componenti spettrali subiscono lo stesso ritardo, il che non crea distorsioni. Se, invece, il ritardo di gruppo è diverso da componente a componente, allora il segnale in uscita risulta anche profondamente diverso da quello in ingresso.

In conclusione, i **filtri ideali** hanno, nella loro banda passante, un modulo costante ed una fase lineare. In tutti i casi, questi filtri non sono fisicamente realizzabili e servono perciò solo come una idealizzazione matematica dei filtri reali. Per fare un esempio, il filtro ideale passa-basso ha notoriamente la seguente risposta all'impulso:

$$h_{LP}(n) = \frac{\sin(\omega_C \pi n)}{\pi n} \qquad -\infty < n < \infty$$

Questa sequenza è di lunghezza infinita, ma non è causale e non è nemmeno assolutamente sommabile, il che significa che il filtro è non fisicamente realizzabile oltre che instabile. Tuttavia, la sua risposta in frequenza H(ω) può essere molto ben approssimata dai filtri reali.

Nei prossimi discorsi ci occuperemo sostanzialmente del progetto di alcuni semplici **filtri digitali** ottenuto sistemando opportunamente poli e zeri nel **piano-z** (ci riferiamo perciò a poli e zeri del polinomio H(z) che si ottiene calcolando la trasformata zeta della risposta all'impulso dei filtri). Per fare questo, sfrutteremo concetti già visti (capitoli 3,4 e 5) sull'effetto che poli e zeri di H(z) hanno sulle caratteristiche della funzione di trasferimento H(ω) del sistema.

Il metodo di posizionamento dei poli e gli zeri si basa su due principi essenziali:

- *sistemare i poli vicino a quei punti del cerchio unitario corrispondenti alle frequenze da enfatizzare;*
- *sistemare gli zeri vicino a quei punti del piano-z corrispondenti alle frequenze da attenuare maggiormente.*

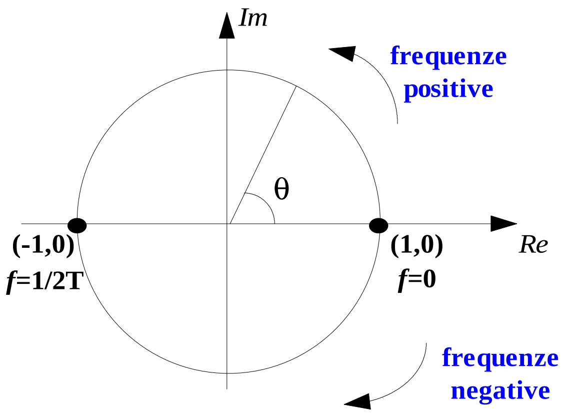
Questi obbiettivi vanno del resto perseguiti rispettando rigorosamente i seguenti due vincoli imprescindibili:

- *tutti i poli vanno sistemati all'interno del cerchio unitario, in modo che il filtro sia stabile; al contrario, gli zeri possono essere piazzati ovunque nel piano-z;*
- *tutti gli zeri complessi ed i poli complessi devono sempre comparire in coppie complesse coniugate, in modo che i coefficienti del filtro siano sempre reali.*

FILTRI PASSA-BASSO

Cominciamo da semplici criteri di progetto di un **filtro (numerico) passa-basso**. Cominciamo intanto a ricordare che stiamo considerando un mondo tempo-discreto, relativo ad un passo di campionamento che indichiamo con T. Essendo un mondo campionato a passo $T=1/f_C$, il corrispondente dominio della frequenza è periodico: con riferimento alle pulsazioni, l'**intervallo non ambiguo** è **[-π/T,+π/T]**, di ampiezza 2π/T, dove π/T è la pulsazione corrispondente alla frequenza di Nyquist 1/2T.

E' anche opportuno ricordare la corrispondenza esistente tra frequenze nel *dominio di Fourier* e punti nel *piano-z*. Tale corrispondenza è riassunta nella seguente figura:



Ogni punto è individuato da un vettore, di modulo **r** e fase θ (rispetto all'asse reale positivo). Se consideriamo, in particolare, punti sul **cerchio di raggio unitario**, allora r=1, per cui l'unico parametro identificativo diventa l'angolo θ. Con riferimento allora a tali punti, abbiamo quanto segue:

- gli angoli compresi tra θ=0 e θ=π (**semipiano-z superiore**) sono rappresentativi di frequenze comprese tra 0 a 1/2T (cioè pulsazioni comprese tra 0 e π/T), ossia sono rappresentativi delle frequenze positive;
- gli angoli compresi tra -π e 0 (**semipiano-z inferiore**) sono rappresentativi delle frequenze negative[1], cioè quelle comprese tra -1/2T e 0 (cioè pulsazioni comprese tra -π/T e 0).

[1] Ricordiamo che stiamo considerando segnali tempo-continui campionati nei tempi, per cui il loro spettro (la DTFT) si ripete periodicamente, con un periodo pari alla frequenza di campionamento f_C=1/T. Questo è il motivo per cui ha senso considerare solo le frequenze che vanno da $-f_C/2$ a $f_C/2$, cioè quelle del cosiddetto periodo fondamentale: in queste frequenze è compreso lo spettro del segnale x(t) di partenza (sempre nell'ipotesi di aver rispettato il teorema del campionamento).

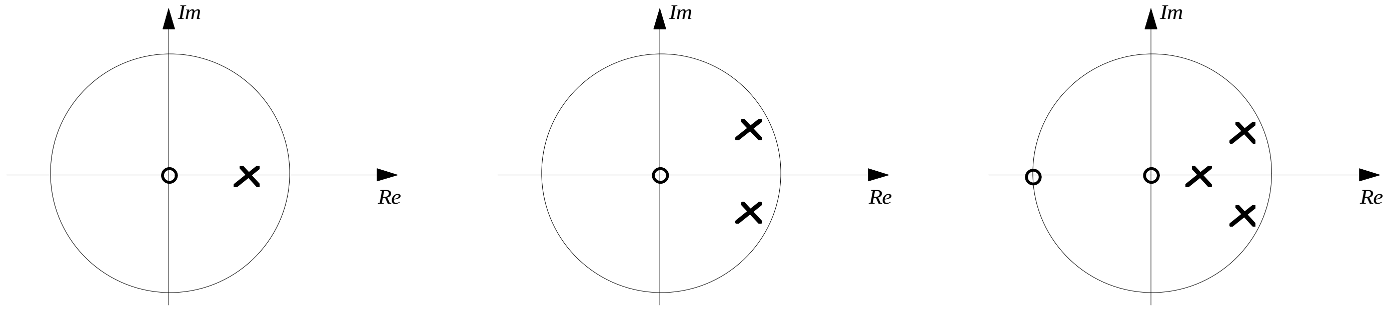
Si nota immediatamente una corrispondenza tra l'angolo θ che individua i vari punti sul cerchio unitario e la corrispondente pulsazione ω: se $\theta=\theta_0$, la corrispondente pulsazione è $\omega=\theta_0/T$. C'è dunque una costante di proporzionalità T tra le due quantità. Allora, se per semplicità poniamo T=1(sec), otteniamo una coincidenza numerica tra θ ed ω, per cui potremo ragionare in termini di una sola tra le due quantità, tipicamente ω.

Fatti questi richiami, possiamo tornare al problema di fondo che ci interessa in questo paragrafo, ossia il progetto di un filtro numerico passa-basso. *Dire che vogliamo un filtro numerico passa-basso significa dire che la H(w), periodica di periodo 2p/T, dovrà lasciare passare le basse frequenze (cioè quelle vicine a w=0) e attenuare le alte frequenze (cioè quelle vicine a w=p/T).*

Per ottenere un filtro passa-basso, dovremo quindi seguire due regole:

- i poli della funzione di sistema H(z) vanno sistemati nei pressi del cerchio unitario (sempre all'interno per garantire la stabilità), nei punti corrispondenti alle basse frequenze (quindi vicino a $\omega=0$);
- gli zeri della funzione H(z) vanno invece sistemati vicino o anche sul cerchio unitario, in corrispondenza delle alte frequenze (vicino a $\omega=\pi$).

Tipiche mappe poli-zeri di filtri passa-basso sono allora quelle illustrate nella figura seguente:

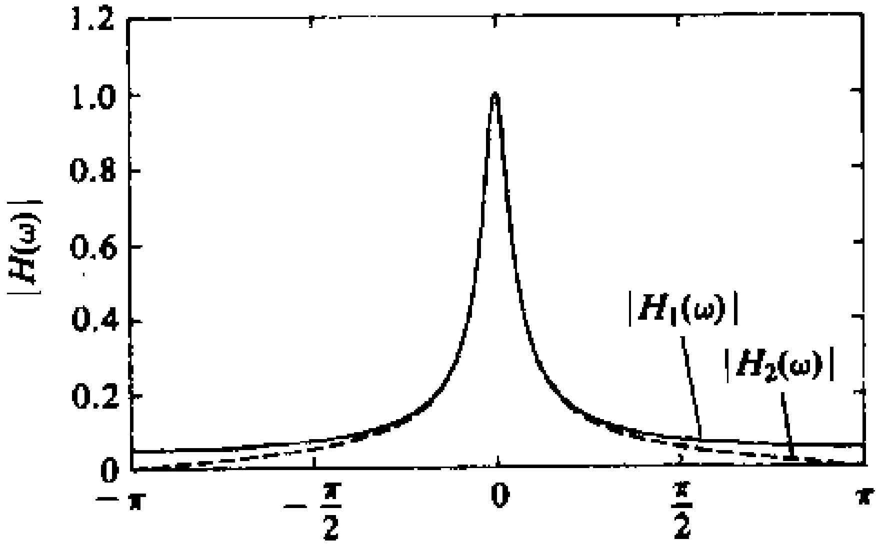


La mappa più a sinistra corrisponde ad un filtro a singolo polo ($p=+a$) e con uno zero nell'origine: la corrispondente funzione di sistema è

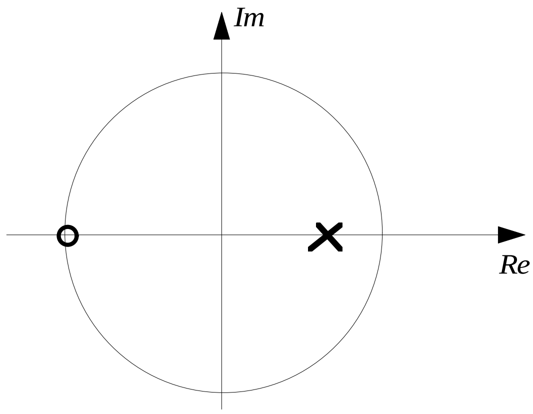
$$H_1(z)=\frac{1-a}{1-az^{-1}}$$

A numeratore è stato posto un guadagno *1-a* che serve solo alla normalizzazione, in quanto esso fa in modo che il guadagno a frequenza $\omega=0$ sia unitario.

Il polo p=+a è stato posto sull'asse reale, nei pressi di $\omega=0$, in modo da esaltare le basse frequenze. Quanto più il polo si trova vicino al cerchio unitario, tanto più il filtro è selettivo nei confronti delle basse frequenze. Ad esempio, se prendiamo a=0.9, il modulo della corrispondente funzione di trasferimento $H_1(\omega)$ è quello diagrammato nella figura seguente:



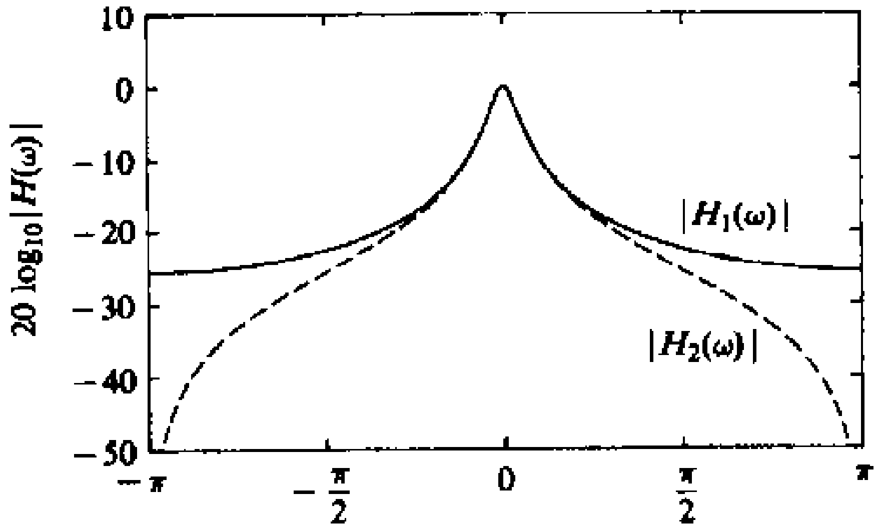
Si nota essenzialmente che il guadagno di questo filtro alle alte frequenze è relativamente piccolo. Potremmo però imporre una attenuazione ancora maggiore introducendo uno zero opportunamente piazzato: dato che vogliamo attenuare le alte frequenze, ci conviene piazzare lo zero in z=-1 (corrispondente a $\omega=\pm\pi$).



Così facendo, la funzione di sistema diventa

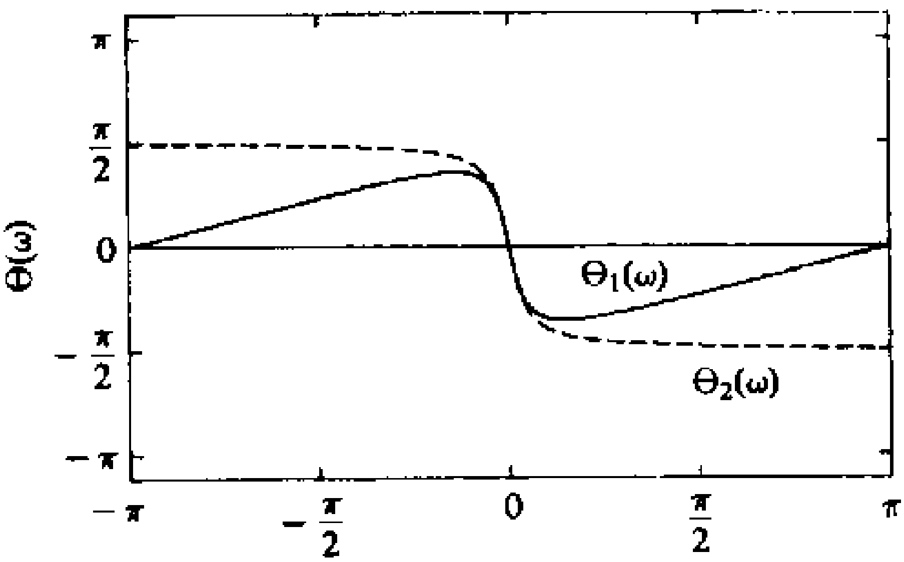
$$H_2(z) = H_1(z)\cdot\frac{1+z^{-1}}{2} = \frac{1-a}{1-az^{-1}}\cdot\frac{1+z^{-1}}{2} = \frac{1-a}{2}\cdot\frac{z+1}{z-a}$$

dove il fattore 2 a denominatore serve ancora alla normalizzazione. Si ottiene una funzione di trasferimento $H_2(\omega)$ il cui modulo è stato diagrammato prima insieme a quello di $H_1(\omega)$. Se, però, vogliamo apprezzare maggiormente l'effetto dello zero, ci conviene adottare, sulle ascisse, una scala logaritmica. Con questa scelta, il diagramma dei moduli di $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$ risulta essere il seguente:



Si nota subito che l'attenuazione di $H_2(\omega)$ è decisamente più elevata, alle alte frequenze, rispetto ad $H_1(\omega)$, mentre invece l'andamento delle due funzioni alle basse frequenze è praticamente lo stesso.

Concludiamo questa analisi riportando anche le caratteristiche di fase dei due filtri, che risentono ovviamente anch'esse della presenza dello zero in $H_2(\omega)$:



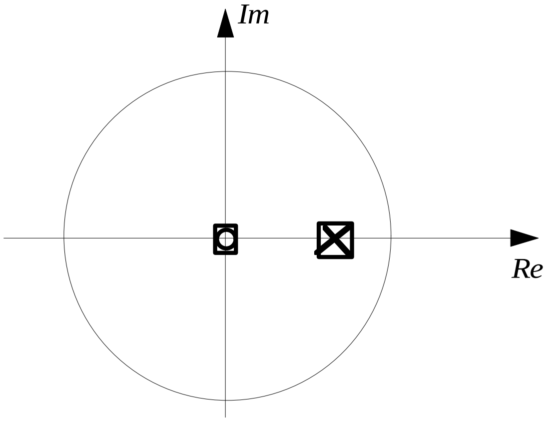
In entrambi i casi, abbiamo un andamento praticamente lineare per le basse frequenze (cioè nella banda passante), mentre poi i due andamenti diventano fortemente non lineari (oltre che profondamente diversi) per le alte frequenze (cioè al di fuori della banda passante). Si nota, in particolare, che $H_1(\omega)$ è un filtro **a fase minima**: come diremo più avanti, infatti, *un filtro IIR (tale è un filtro che presenta almeno un polo) si definisce a fase minima quando tutti i suoi zeri ed i suoi poli sono all'interno del cerchio unitario;* la terminologia "**a fase minima**" deriva dal fatto che risulta nulla la differenza $\Theta_1(0)$-$\Theta_1(\pi)$ tra la fase del filtro in ω=0 e quella in ω=π.

Esempio

Consideriamo un filtro passa-basso a due poli, la cui funzione di sistema sia la seguente:

$$H(z) = \frac{b_0}{\left(1 - pz^{-1}\right)^2}$$

I due poli sono evidentemente reali e coincidenti (situati in $+p$) e ad essi si aggiunge evidentemente uno zero doppio nell'origine:



Vogliamo determinare i valori da attribuire alle costanti b_0 e p in modo che la funzione di trasferimento H(ω) del filtro soddisfi i seguenti due requisiti:

$$H(0) = 1$$
$$\left| H\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Cominciamo ad imporre il primo vincolo, ossia un guadagno unitario in continua (ω=0): calcolando H(z) per z=1 (corrispondente ad ω=0, visto che il passaggio da H(z) ad H(ω) si ottiene ponendo $z=e^{j\omega T}$), otteniamo

$$H(z=1) = H(\omega=0) = \frac{b_0}{(1-p)^2}$$

Imponendo la normalizzazione, otteniamo evidentemente la condizione $b_0 = (1-p)^2$.

Adesso determiniamo H(ω) e calcoliamo il suo valore per ω=π/4:

$$H(z) = \frac{b_0}{\left(1 - pz^{-1}\right)^2} \xrightarrow{z=e^{j\omega}} H(\omega) = \frac{b_0}{\left(1 - pe^{-j\omega}\right)^2} \xrightarrow{\omega=\pi/4} H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b_0}{\left(1 - pe^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^2} = \dots = \frac{b_0}{\left(1 - \frac{p}{\sqrt{2}} + j\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Imponendo l'uguaglianza con ½ e considerando anche che $b_0 = (1-p)^2$, si ottiene l'equazione

$$\sqrt{2}(1-p)^2 = 1 + p^2 - \sqrt{2}p$$

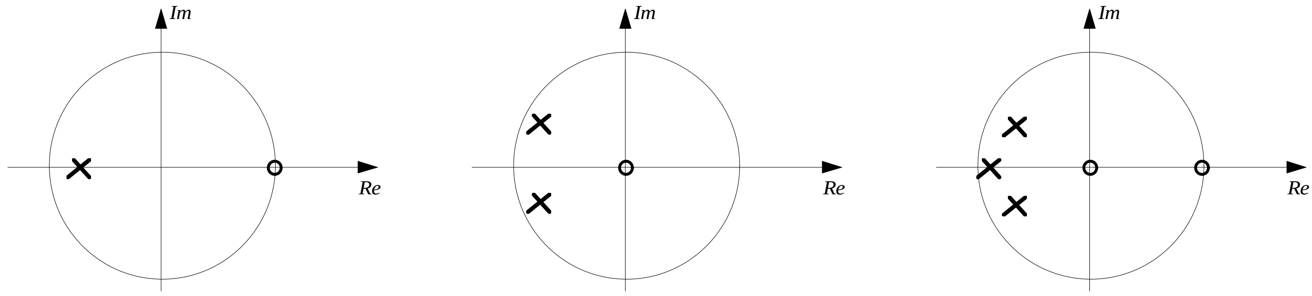
Scartando la soluzione all'esterno del cerchio unitario, si trova **p=0.32**, da cui scaturisce **b_0=0.46**.

FILTRI PASSA-ALTO

Per progettare un filtro passa-alto possiamo seguire delle regole esattamente duali di quelle viste per un filtro passa-basso:

- i poli della funzione di sistema H(z) vanno sistemati nei pressi del cerchio unitario (sempre all'interno), nei punti corrispondenti alle alte frequenze (quindi vicino a ω=π);
- gli zeri della funzione H(z) vanno invece sistemati vicino o anche sul cerchio unitario, in corrispondenza delle basse frequenze (vicino a ω=0).

Tipiche mappe poli-zeri di filtri passa-alto sono allora quelle illustrate nella figura seguente:

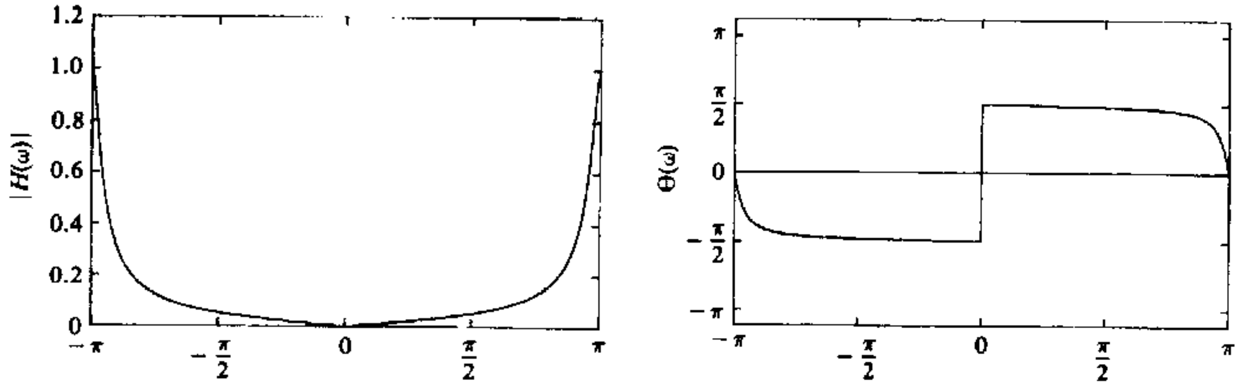


Sono esattamente le duali di quelle viste per i filtri passa-basso: basta cioè ripiegare (*folding*) le posizioni dei poli e degli zeri di un filtro passa-basso rispetto all'asse immaginario del piano-z.

Ad esempio, se riprendiamo dal precedente paragrafo il filtro passa-basso dato dalla funzione di trasferimento $H_2(z) = \frac{1-a}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$, il corrispondente filtro passa-alto si ottiene invertendo il segno dei poli e degli zeri:

$$H_3(z) = \frac{1-a}{2} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}}$$

Il modulo e la fase della corrispondente funzione di trasferimento $H_3(\omega)$ sono diagrammati nella figura seguente, per a=0.9, cioè disponendo il polo molto vicino a z=-1 (cioè ω=π):



FILTRI PASSA-BANDA

Per il progetto dei **filtri numerici passa-banda**, ottenuto con il banale metodo di piazzare opportunamente poli e zeri della H(z), i criteri da seguire sono simili a quelli visti per i filtri passa-basso e passa-banda: sostanzialmente, *un filtro passa-banda dovrà contenere una o più coppie di poli complessi coniugati vicini al cerchio unitario e, in particolare, nei pressi della banda di frequenze che costituisce la banda passante.* Usiamo allora un esempio concreto per capire questi concetti.

Vogliamo progettare un filtro passa-banda, a 2 poli, che abbia le seguenti caratteristiche:

- la banda passante deve essere centrata su $\omega=\pi/2$;
- la funzione di trasferimento $H(\omega)$ deve valere zero sia per $\omega=0$ sia per $\omega=\pi$;
- il modulo di $H(\omega)$ deve valere $1/\sqrt{2}$ in corrispondenza di $\omega=4\pi/9$.

Se vogliamo che la banda passante sia centrata su $\omega=\pi/2$, dovremo evidentemente garantire che il massimo modulo della $H(\omega)$ si ottenga proprio in corrispondenza di tale pulsazione, il che significa disporre la coppia di poli complessi nel modo seguente:

$$p_{1/2} = re^{\pm j\frac{\pi}{2}}$$

Se fosse r=1, i poli sarebbero sul cerchio unitario, in corrispondenza delle sue intersezioni con l'asse immaginario. Al contrario, noi dobbiamo disporre i poli sempre all'interno del cerchio unitario, per cui prenderemo un modulo *r* di valore opportuno (da determinarsi sulla base delle altre specifiche).

Possiamo dunque cominciare a costruire la funzione di sistema del filtro:

$$H(z) \propto \frac{1}{(z-jr)(z+jr)}$$

dove ovviamente abbiamo tenuto conto che $e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j$ e dove abbiamo usato z al posto di z^{-1} per evitare la presenza di zeri nell'origine indesiderati.

La seconda specifica richiede che $H(\omega)$ sia nulla sia per $\omega=0$ sia per $\omega=\pi$. Dobbiamo allora piazzare due zeri di H(z) in corrispondenza di tali frequenze, ossia in z=1 e z=-1. La funzione di sistema assume dunque la forma

$$H(z) \propto \frac{(z+1)(z-1)}{(z-jr)(z+jr)} = \frac{z^2-1}{z^2+r^2} = \frac{1-z^{-2}}{1+r^2z^{-2}}$$

La proporzionalità può essere banalmente espressa con una costante di guadagno arbitraria G:

$$H(z) = G\frac{1-z^{-2}}{1+r^2z^{-2}}$$

A questo punto, abbiamo due incognite (G ed r oppure G ed r^2) ed un solo grado di libertà, rappresentato dall'ultima specifica di progetto. Per guadagnare un ulteriore grado di libertà, in modo da rendere univoca la scelta del filtro, possiamo imporre che il guadagno a centro banda sia unitario: ciò significa imporre che

$$\left| H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = 1$$

Calcoliamo dunque H(ω) in corrispondenza di ω=π/2 e imponiamo che il suo modulo sia uguale ad 1: facendo i conti, si trova facilmente che la condizione da imporre è

$$G = \frac{1-r^2}{2}$$

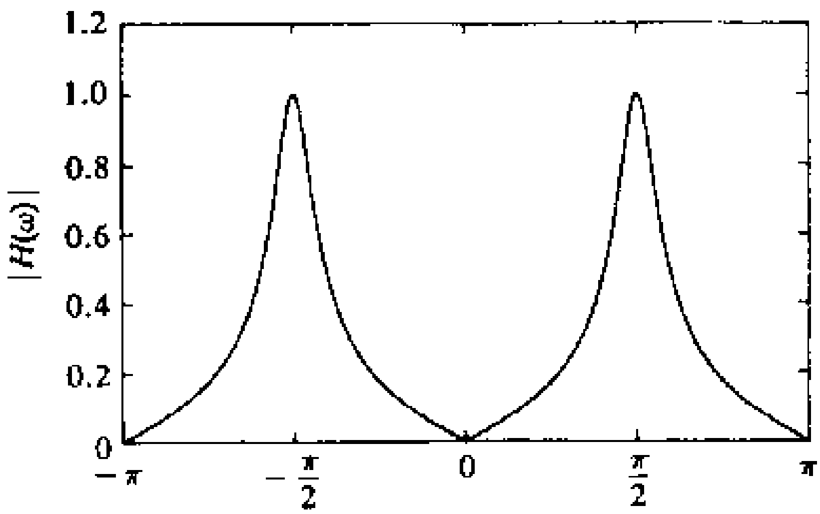
Questa condizione va affiancata a quella per cui il modulo di H(ω), in corrispondenza di ω=4π/9, deve valere $1/\sqrt{2}$: imponendo le due condizioni, si trova la relazione

$$1.94\left(1-r^2\right)^2 = 1 - 1.88r^2 + r^4$$

Questa equazione è soddisfatta da r^2=0.7, cui corrisponde G=0.15. In conclusione, la funzione di sistema ottenuta è

$$H(z) = 0.15 \cdot \frac{1-z^{-2}}{1+0.7\cdot z^{-2}}$$

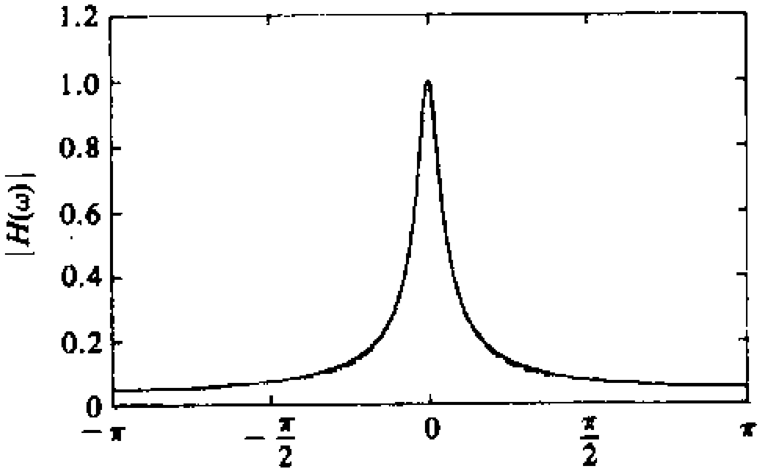
La corrispondente funzione di trasferimento ha il seguente andamento del modulo in funzione di ω (nell'intervallo non ambiguo):



SEMPLICE TRASFORMAZIONE DA FILTRO PASSA-BASSO A FILTRO PASSA-ALTO

Supponiamo di aver progettato il prototipo di un filtro passa-basso, caratterizzato da una risposta all'impulso $h_{LP}(n)$. Utilizzando le *proprietà di traslazione in frequenza* della trasformata di Fourier, possiamo convertire il prototipo sia in un filtro passa-alto sia in un filtro passa-banda. Per esempio, vediamo un metodo banale per convertire il filtro da passa-basso a passa-alto.

Indichiamo con $H_{LP}(\omega)$ la funzione di trasferimento del filtro passa-basso progettato, ossia la trasformata di Fourier di $h_{LP}(n)$. Se, per esempio, si trattasse di un filtro molto selettivo per le basse frequenze, potrebbe trattarsi di un filtro con modulo della funzione di trasferimento del tipo seguente:



Una simile funzione di trasferimento si ottiene con la seguente funzione di sistema:

$$H_{LP}(z) = \frac{1-a}{2} \cdot \frac{z+1}{z-a}$$

con *a* molto vicino ad 1 (in figura è a=0.9).

Per convertire il filtro da passa-basso a passa-alto, mantenendo la stessa selettività, possiamo traslare la funzione di trasferimento in alta frequenza. Ad esempio, una traslazione perfettamente simmetrica rispetto a $\pi/2$ (e $-\pi/2$ per le pulsazioni negative) si ottiene traslando di π:

$$H_{LP}(\omega) \xrightarrow{\omega=\omega-\pi} H_{HP}(\omega) = H_{LP}(\omega-\pi)$$

Adesso, $H_{HP}(\omega)$ è la funzione di trasferimento di un filtro passa-alto. Se vogliamo trovare la corrispondente funzione di risposta all'impulso, ci basta applicare la *proprietà di traslazione in frequenza* della trasformata di Fourier, in base alla quale una traslazione in frequenza di π equivale all'introduzione dell'operatore $e^{j\pi n}$ su ciascun campione della risposta all'impulso: quindi

$$h_{LP}(n) \xrightarrow{\cdot e^{j\pi n}} h_{HP}(n) = h_{LP}(n) \cdot e^{j\pi n}$$

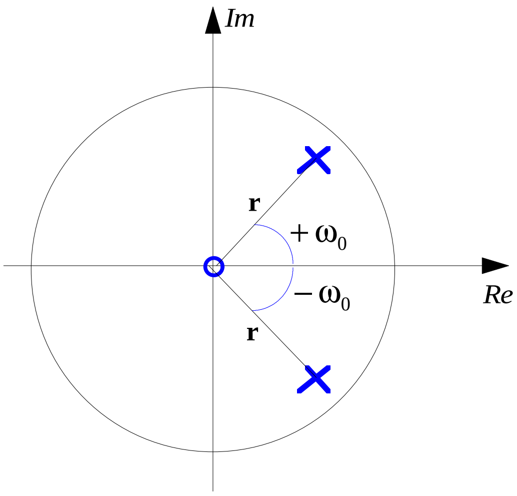
D'altra parte, se sviluppiamo l'esponenziale $e^{j\pi n}$, ricaviamo che esso vale $(-1)^n$, per cui concludiamo che

$$h_{HP}(n) = (1-)^n \cdot h_{LP}(n)$$

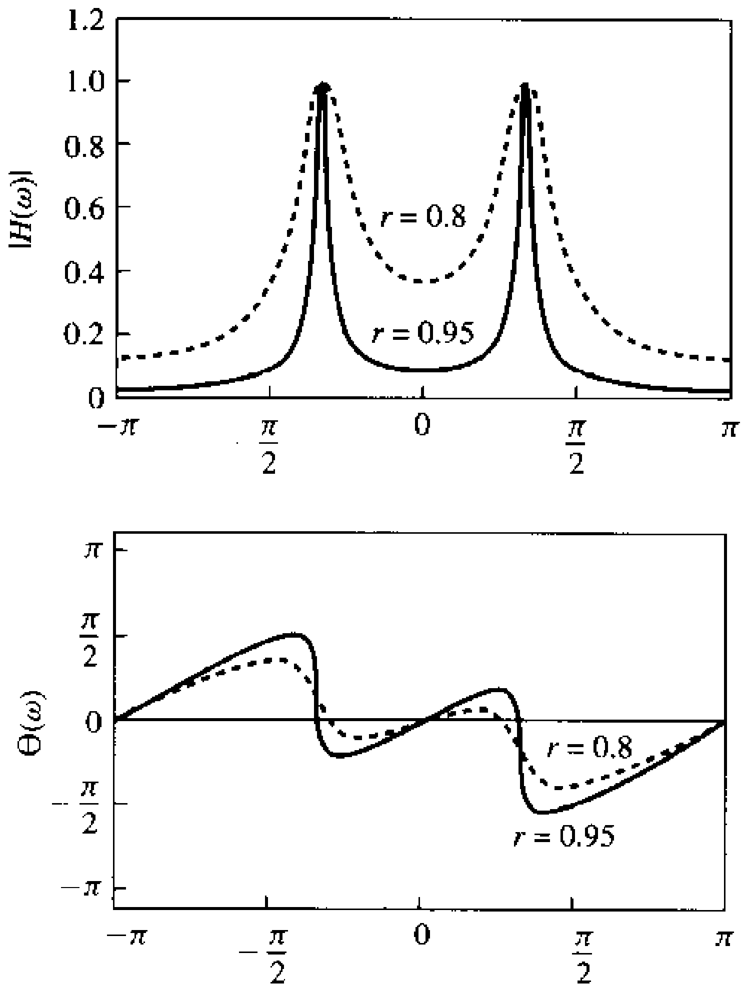
Questo è dunque un metodo molto semplice per passare da un filtro passa-basso al filtro passa-alto esattamente duale.

RISONATORI DIGITALI

Un **risonatore digitale** è un particolare filtro passa-banda con 2 poli complessi coniugati, situati nei pressi del cerchio unitario, come indicato nella figura seguente:



Nella figura seguente sono riportate le caratteristiche (modulo e fase) della funzione di trasferimento H(ω) corrispondente a questa mappa poli-zeri, considerando i casi di r=0.8 ed r=0.95, ossia variando la distanza dei poli dal cerchio unitario e lasciando invariata la posizione angolare (ω=π/3):



Si nota subito, nell’andamento del modulo, che il diverso valore di *r* non produce un valore diverso del picco di risonanza, ma determina in modo leggermente complesso l’andamento generale della H(ω): come verificheremo più avanti, un valore di *r* maggiore (cioè una maggiore vicinanza dei poli al cerchio unitario) determina maggiore selettività da parte del filtro.

Per la caratteristica di fase, invece, un valore maggiore di *r* determina, in corrispondenza della pulsazione di risonanza, un andamento lineare con maggiore pendenza.

Il termine **risonatore** indica il fatto che il filtro ha un modulo di H(ω) particolarmente elevato in prossimità dei poli. La posizione angolare ($\pm\omega_0$) indica la frequenza di risonanza del filtro.

Per progettare un risonatore digitale con **pulsazione di risonanza** ω_0, dobbiamo procedere in modo analogo a quanto si fa per progettare un filtro passa-banda con banda centrata su ω_0: dobbiamo cioè imporre che il massimo modulo della H(ω) si ottenga proprio in corrispondenza di ω_0, il che significa disporre la coppia di poli complessi nel modo seguente:

$$p_{1/2} = re^{\pm j\omega_0}$$

Se fosse r=1, i poli sarebbero sul cerchio unitario; al contrario, noi dobbiamo disporre i poli sempre all’interno del cerchio unitario, per cui prenderemo un modulo *r* di valore opportuno (da determinarsi sulla base di altre specifiche).

Oltre ai due poli, possiamo eventualmente aggiungere uno o due zeri per imporre ulteriori specifiche. Ci sono allora due scelte ricorrenti:

- la prima consiste nel porre i due zeri nell’origine, il che si ottiene imponendo che

$$H(z) \propto \frac{1}{\left(1-re^{j\omega_0}z^{-1}\right)\left(1-re^{-\omega_0}z^{-1}\right)}$$

- la seconda consiste invece nel porre uno zero in z=1 (ω=0) ed uno zero in z=-1 (ω=π), al fine di imporre una attenuazione massima (guadagno nullo) in corrispondenza delle pulsazioni ω=0 e ω=π; questo lo si ottiene ponendo

$$H(z) \propto \frac{(z-1)(z+1)}{\left(z-re^{j\omega_0}\right)\left(z-re^{-\omega_0}\right)} = \frac{z^2-1}{\left(z-re^{j\omega_0}\right)\left(z-re^{-\omega_0}\right)}$$

Indaghiamo su quanto si ottiene con entrambe queste scelte.

Se sistemiamo i due zeri nell’origine, abbiamo una funzione di sistema del tipo seguente:

$$H(z) = \frac{G}{\left(1-re^{j\omega_0}z^{-1}\right)\left(1-re^{-\omega_0}z^{-1}\right)}$$

La costante di guadagno G può essere determinata imponendo, ad esempio, che risulti unitario il guadagno in corrispondenza della pulsazione di risonanza ω_0. La funzione di trasferimento H(ω) che così si ottiene è quella diagrammata nell’ultima figura.

E’ facile verificare che modulo e fase della H(ω) così ottenuta assumono le seguenti espressioni:

$$|H(\omega)| = \frac{G}{U_1(\omega)U_2(\omega)}$$
$$\Theta(\omega) = 2\omega - \Phi_1(\omega) - \Phi_2(\omega)$$

dove $U_1(\omega)$ e $U_2(\omega)$ sono i moduli dei vettori che congiungono i poli p_1 e p_2 con il punto ω sul cerchio unitario, mentre $\Phi_1(\omega)$ e $\Phi_2(\omega)$ sono i corrispondenti angoli formati dai due vettori con l'asse reale positivo.

Si può verificare che la frequenza di risonanza, ossia la frequenza alla quale il prodotto $U_1(\omega)U_2(\omega)$ assume il suo valore minimo, è

$$\omega_r = \arccos\left(\frac{1+r^2}{2r}\cos\omega_0\right)$$

Essa dunque non coincide rigorosamente con ω_0, a causa di quel termine $\frac{1+r^2}{2r}$ che compare in parentesi. D'altra parte, ci si rende conto che tale termine è tanto più prossimo all'unità quanto più *r* si avvicina ad 1, ossia quanto più i poli si avvicinano al cerchio unitario.

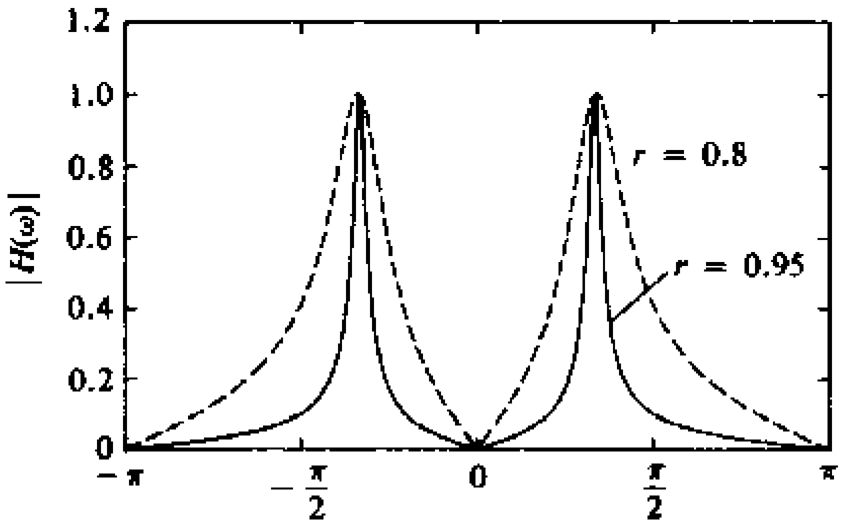
Se, invece, scegliamo di sistemare i due zeri in z=1 e z=-1, la funzione di sistema diventa

$$H(z) = G\frac{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-re^{j\omega_0}z^{-1}\right)\left(1-re^{-\omega_0}z^{-1}\right)}$$

La corrispondente trasferimento risulta avere il seguente modulo:

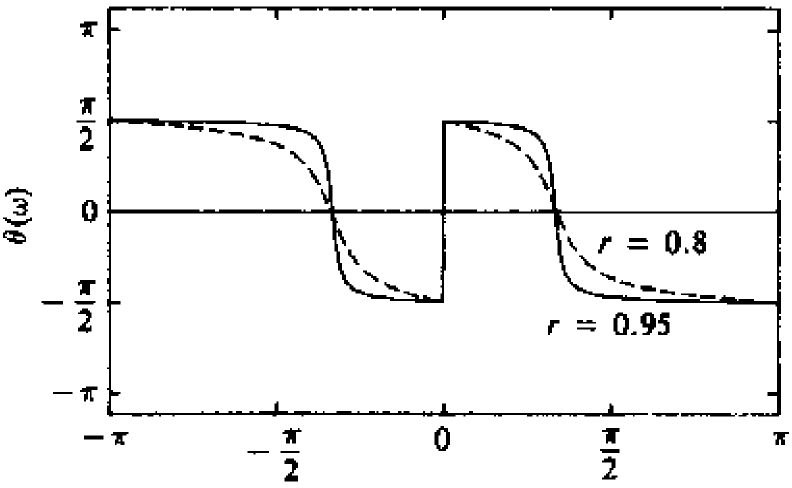
$$|H(\omega)| = G\frac{N(\omega)}{U_1(\omega)U_2(\omega)} = G\frac{\sqrt{2(1-\cos(2\omega))}}{U_1(\omega)U_2(\omega)}$$

La differenza rispetto a prima è dunque in quel termine $N(\omega)$ che compare al numeratore. A causa di questo termine, la frequenza di risonanza risulta alterata rispetto alla ω_r calcolata prima, come anche risulta alterata la larghezza di banda. Senza scendere nei dettagli analitici (peraltro piuttosto laboriosi), limitiamoci a diagrammare il modulo e la fase di questa nuova $H(\omega)$ per gli stessi valori di r e di ω_0 usati nella precedente figura. Cominciamo dal modulo:



Osserviamo, rispetto a quanto ottenuto prima, due cose: la prima è in una piccolissima variazione della frequenza di risonanza dovuta alla presenza dei due zeri; la seconda è una larghezza di banda più piccola rispetto all'altro caso.

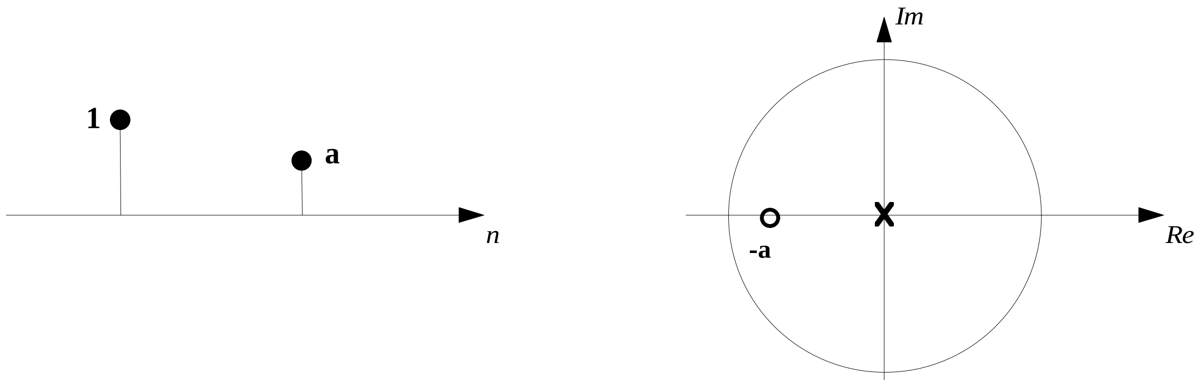
Riportiamo adesso la fase:



Questo andamento è profondamente diverso da quello ottenuto ponendo i due zeri nell'origine. In comune, però, a quel caso notiamo un andamento sostanzialmente lineare in corrispondenza della risonanza.

FILTRI A FASE MINIMA, A FASE MASSIMA ED A FASE MISTA

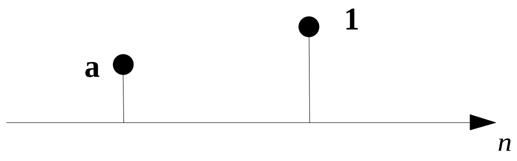
Riprenderemo adesso, al fine di estenderli, alcuni concetti già visti in precedenza. Consideriamo infatti un filtro FIR la cui funzione di risposta all'impulso sia $h(n)=\{1 \quad a\}$, con 0<a<1:

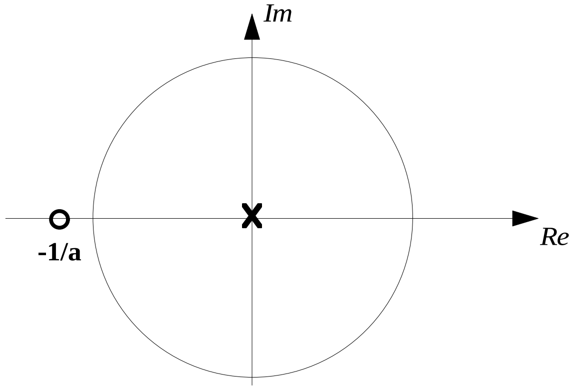


La funzione di sistema di questo filtro è $H_1(z)=1+az^{-1}$ e quindi la corrispondente funzione di trasferimento è

$$H_1(z)\xrightarrow{z=e^{j\omega T}}H_1(\omega)=1+ae^{-j\omega T}$$

Abbiamo già osservato in precedenza cosa succede se consideriamo il filtro $H_2(z)$ che da questo si ottiene invertendo la risposta all'impulso:





La mappa poli-zeri è cambiata, in quanto, mentre è rimasto il polo nell'origine, lo zero si è spostato in -1/a (al di fuori del cerchio unitario, visto che a<1): la funzione di sistema è

$$H_2(z) = a + z^{-1}$$

e ad essa corrisponde la funzione di trasferimento

$$H_2(\omega) = a + e^{-j\omega T}$$

Come già verificato in precedenza, $H_1(\omega)$ ed $H_2(\omega)$ hanno la particolarità di avere lo stesso modulo:

$$|H_1(\omega)| = \left|1 + ae^{-j\omega T}\right| = |1 + a\cos(\omega T) - ja\sin(\omega T)| = \sqrt{(1 + a\cos(\omega T))^2 + a^2\sin^2(\omega T)} = \sqrt{1 + a^2 + 2a\cos(\omega T)}$$

$$|H_2(\omega)| = \left|a + e^{-j\omega T}\right| = |a + \cos(\omega T) - j\sin(\omega T)| = \sqrt{(a + \cos(\omega T))^2 + \sin^2(\omega T)} = \sqrt{1 + a^2 + 2a\cos(\omega T)}$$

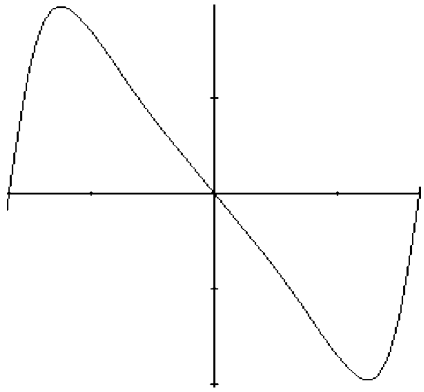
Si tratta chiaramente di un andamento cosinusoidale, di ampiezza 2a, cui è sovrapposto un termine costante $1+a^2$.

La differenza tra i due filtri è rappresentata invece dalla fase e deriva evidentemente dal fatto che $H_1(z)$ ha lo zero all'interno del cerchio unitario (z=-a), mentre $H_2(z)$ lo ha all'esterno (z=-1/a), in posizione reciproca: le due caratteristiche di fase sono

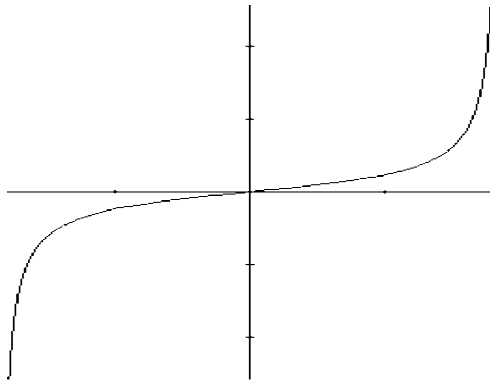
$$H_1(\omega) = 1 + ae^{-j\omega T} = 1 + a\cos(\omega T) - ja\sin(\omega T) \longrightarrow \Phi_1(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{-a\sin(\omega T)}{1 + a\cos(\omega T)}$$

$$H_2(\omega) = a + e^{-j\omega T} = a + \cos(\omega T) - j\sin(\omega T) \longrightarrow \Phi_2(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{-\sin(\omega T)}{a + \cos(\omega T)}$$

L'andamento della fase di $H_1(\omega)$, nell'intervallo non ambiguo $(-\pi/T, \pi/T)$, risulta essere il seguente:



L'andamento della fase di $H_2(\omega)$ risulta invece essere il seguente:



L'unica cosa in comune, tra i due andamenti, è l'attraversamento per lo zero in corrispondenza di $\omega=0$.

La funzione $H_1(\omega)$ si dice **a fase minima**, mentre $H_2(\omega)$si dice **a fase massima.** Il motivo di queste denominazioni riguarda il valore assunto, nei due casi, dalla differenza tra la fase $\Phi(\pi/T)$ calcolata in $\omega=\pi/T$ e la fase $\Phi(0)$ calcolata in $\omega=0$: per $H_1(\omega)$, risulta

$$\Phi_1\left(\frac{\pi}{T}\right)-\Phi_1(0)=0$$

da cui appunto la denominazione di *sistema a fase minima*, mentre invece per $H_2(\omega)$ risulta

$$\Phi_2\left(\frac{\pi}{T}\right)-\Phi_2(0)=\pi$$

da cui la denominazione di *sistema a fase massima*.

Queste due definizioni, viste per due filtri FIR di lunghezza 2, possono in realtà essere estese a filtri FIR di lunghezza qualsiasi. Consideriamo infatti un filtro FIR di lunghezza M+1, avente perciò M zeri. Possiamo esprimere la sua funzione di sistema e la corrispondente funzione di trasferimento nel modo seguente:

$$H(z)=G\left(1-z_1z^{-1}\right)\left(1-z_2z^{-1}\right)....\left(1-z_Mz^{-1}\right)$$
$$H(\omega)=G\left(1-z_1e^{-j\omega T}\right)\left(1-z_2e^{-j\omega T}\right)....\left(1-z_Me^{-j\omega T}\right)$$

Le definizioni sono allora quelle a noi note:

- un filtro FIR si dice **a fare minima** quando gli zeri della sua H(z) giacciono tutti all'interno del cerchio di raggio unitario: infatti, se consideriamo il prodotto che costituisce H(ω), quando tutti gli zeri sono all'interno del cerchio unitario, tutti i termini corrispondenti a zeri reali producono una variazione netta nulla della fase tra ω=0 e ω=π/T, così come tutti i termini corrispondenti a coppie di zeri complessi coniugati: risulta perciò

$$\Phi\left(\frac{\pi}{T}\right)-\Phi(0)=0$$

- un filtro FIR si dice invece **a fare massima** quando gli zeri della sua H(z) giacciono tutti all'esterno del cerchio di raggio unitario: in questo caso, ogni termine corrispondente ad uno zero reale impone una variazione di fase di π tra ω=0 e ω=π/T, mentre invece ogni termine corrispondente ad una coppia di zeri complessi coniugati produce una variazione di fase di 2π tra ω=0 e ω=π, in modo tale che risulti

$$\Phi\left(\frac{\pi}{T}\right)-\Phi(0)=M\pi$$

Esiste evidentemente un caso misto, in cui H(z) presenta zeri sia all'interno sia all'esterno del cerchio unitario: in questo caso, si parla di sistema **a fase mista**.

Analoghe definizioni si applicano anche ai filtri IIR aventi funzione di sistema H(z) razionale:

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$$

Il filtro si dirà **a fase minima** se tutte le singolarità (poli e zeri) si trovano all'interno del cerchio unitario. Del resto, dato che a noi interessano solo filtri stabili, consideriamo filtri in cui tutti i poli si trovano sicuramente all'interno del cerchio unitario; di conseguenza, diventa ancora una volta discriminante la posizione degli zeri: se gli zeri si trovano tutti al di fuori del cerchio unitario, allora il filtro IIR si dirà **a fase massima**; se invece ci sono zeri sia all'interno sia all'esterno del cerchio unitario, allora si parla ancora una volta di *filtro IIR a fase mista*.

Una conseguenza immediata di queste proprietà è la seguente: se consideriamo un filtro IIR $H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$ a fase minima (quindi anche stabile) e lo invertiamo, ricaviamo un filtro $H^{-1}(z)=\frac{A(z)}{B(z)}$ ancora a fase minima.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1