

Appunti di Compatibilità Elettromagnetica

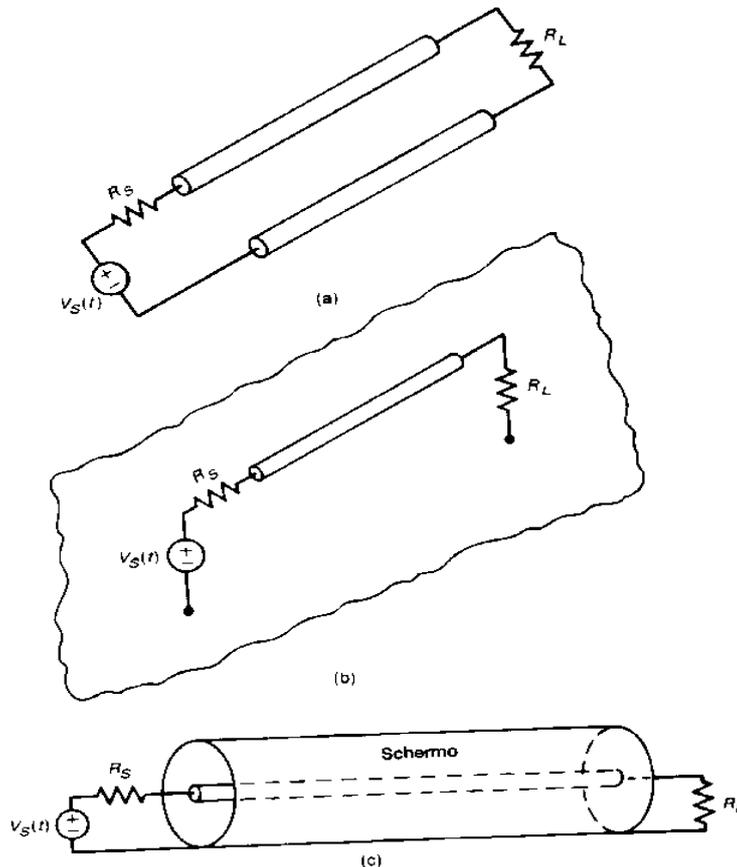
Appendice 2 - Linee di trasmissione

Introduzione	2
Equazione delle linee di trasmissione.....	4
Premesse.....	4
Definizione di tensione e corrente	5
Equazioni della linea di trasmissione.....	6
<i>Parametri per unità di lunghezza</i>	10
Soluzione nel dominio del tempo.....	10
<i>Fenomeno della riflessione</i>	13
Esempio.....	16
Soluzione in regime sinusoidale permanente: Equazione dei telegrafisti.....	17
Introduzione	17
Circuito equivalente di un tratto infinitesimo di linea.....	17
Risoluzione delle equazioni dei telegrafisti.....	19
<i>Osservazione: tensione e corrente nel dominio del tempo</i>	21
Impedenza caratteristica della linea	22
Condizioni al contorno	23
Caso particolare: assenza di perdite ($\alpha=0$).....	24
Impedenza di ingresso.....	26
<i>Caso particolare: perdite nulle</i>	27
Osservazione: applicazione della matrice ABCD	28
Valore esatto della costante di propagazione γ in assenza di perdite	28
Caso particolare: Condizione di Heavyside.....	30
Caso particolare: carico costituito da cortocircuito.....	30
Caso particolare: carico costituito da un circuito aperto	31
Diagrammi della tensione e della corrente in assenza di perdite	32
1° caso: <i>carico costituito da un cortocircuito</i>	33
2° caso: <i>carico costituito da un circuito aperto</i>	34
3° caso: <i>carico adattato</i>	34
Valutazione analitica dei diagrammi.....	36
<i>Rapporto d'onda stazionario</i>	38
Diagrammi dell'impedenza di ingresso	39
Linea di lunghezza $\lambda/4$ come invertitore di impedenza	42
<i>Osservazione</i>	44
Coefficiente di riflessione sul carico.....	44
<i>Coefficiente di trasmissione sul carico</i>	46
<i>Osservazione</i>	48
Coefficiente di riflessione in una sezione generica	49
Flusso di potenza	51

INTRODUZIONE

Una **linea di trasmissione** è semplicemente un sistema formato da due o più conduttori paralleli ravvicinati. In questo capitolo ci occupiamo specificamente del caso in cui i conduttori sono solo due, ma osserviamo che sono di grande interesse pratico anche quelle situazioni in cui i conduttori sono ad esempio tre: in questi casi, infatti, è importante studiare gli effetti della cosiddetta **diafonia**.

Alcuni esempi tipici di linee di trasmissione formate da due conduttori sono illustrati nella figura seguente:



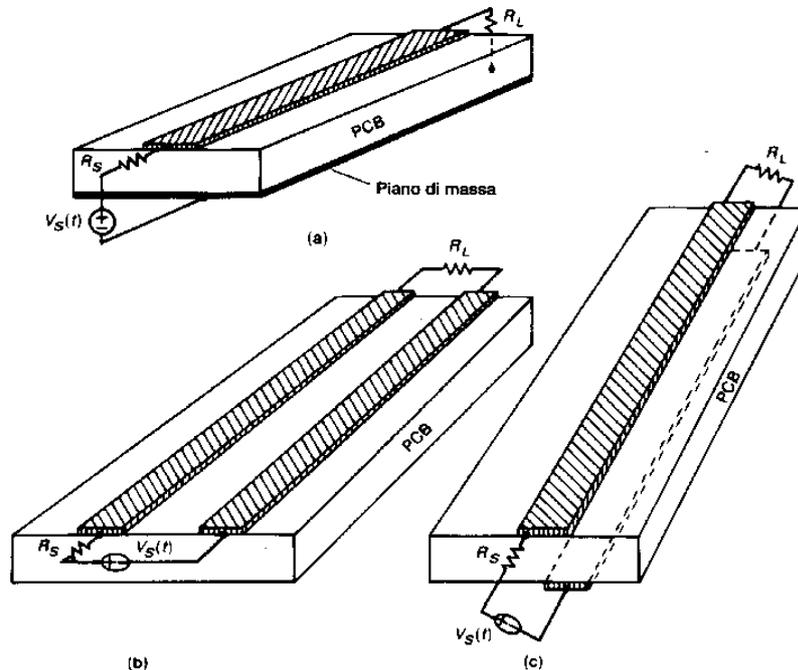
Nella figura (a) è rappresentata una semplice **linea di trasmissione a due fili paralleli**, in cui i due conduttori sono cilindrici con sezione circolare.

L'alimentazione della linea è costituita da una **sorgente** rappresentata tramite il suo equivalente di Thevenin: essa è perciò modellata tramite una tensione di circuito aperto $V_S(t)$ in serie ad una resistenza R_S . Questa alimentazione è connessa, mediante i conduttori della linea, ad un carico di resistenza R_L .

Un altro esempio di linea di trasmissione a due fili è quello della figura (b), in cui è presente un solo conduttore cilindrico, mentre l'altro è stato sostituito da un **piano di massa** (ovviamente metallico) di dimensioni idealmente infinite. Tale piano di massa svolge perciò la funzione di **conduttore di ritorno** per il segnale, il quale, partendo dalla sorgente, raggiunge il carico tramite il conduttore cilindrico (**conduttore di andata**).

Un altro caso ancora è quello della figura (c), in cui è riportato il classico **cavo coassiale** (ad esempio utilizzato per la connettere il televisore alla presa TV domestica). In questo caso, uno schermo cilindrico a sezione circolare (la cosiddetta **calza**) racchiude un conduttore (detto **cuore**) che è localizzato lungo l'asse dello schermo: il cuore funge da conduttore di andata per il segnale, mentre la calza funge da conduttore di ritorno.

Ci sono d'altra parte altre possibili realizzazioni di linee di trasmissione a due conduttori. Di particolare importanza sono quelle che appartengono alla categoria dei **circuiti stampati (PCB, Printed Circuit Board)**. Nella figura seguente sono riportati tre possibili tipologie:



Nella figura (a) notiamo un conduttore con sezione trasversale di forma rettangolare (la cosiddetta **pista**) posto sulla superficie superiore di un substrato dielettrico (ad esempio la *vetroresina*) e poi un piano di massa situato sulla superficie inferiore dello stesso substrato. La pista rappresenta il conduttore di andata, mentre il piano di massa serve per il ritorno del segnale. Questo tipo di linea è comunemente utilizzata per il progetto di circuiti a microonde e viene denominata **linea di trasmissione in microstriscia**.

La figura (b) mostra una linea di trasmissione realizzata direttamente tramite due piste, una di andata ed una di ritorno, depositate sulla stessa faccia del substrato dielettrico. L'altro caso è infine quello della figura (c), in cui si usano ancora due piste, ma disposte sulle facce opposte del substrato.

E' importante sottolineare una importante differenza tra le configurazioni della prima figura e quelle della seconda figura:

- *nella seconda figura, relativa cioè ai circuiti stampati, i conduttori si trovano immersi in un mezzo che non è omogeneo (rispetto alla permittività):* infatti, i campi che si sviluppano tra i due conduttori sono localizzati in parte nell'aria (dove $\epsilon = \epsilon_0$) ed in parte nel substrato dielettrico (dove $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \neq \epsilon_0$);
- al contrario, le configurazioni nella prima figura rappresentano linee a due conduttori in mezzi omogenei; in particolare, il mezzo è generalmente rappresentato dall'aria. In effetti, però, se i conduttori fossero ricoperti (come avviene nei casi reali) da uno strato di isolante, darebbero anch'essi origine a linee in mezzi non omogenei: infatti, in questo caso i campi si localizzerebbero in parte nell'isolante ed in parte nell'aria ad esso circostante.

Per questioni di semplicità, faremo sempre riferimento alla presenza di un mezzo omogeneo costituito dall'aria, il che significa che $\epsilon = \epsilon_0$ (cioè $\epsilon_r = 1$) e $\mu = \mu_0$ (cioè $\mu_r = 1$).

Il problema generale dell'analisi delle linee di trasmissione a due conduttori consiste nel determinare, in tutti i punti della

linea, le correnti nei conduttori e le tensioni tra i due conduttori. In particolare, ciò che ha più importanza è la valutazione di tali correnti e tensioni in corrispondenza della sorgente ed in corrispondenza del carico, ossia agli estremi della linea propriamente detta.

Equazione delle linee di trasmissione

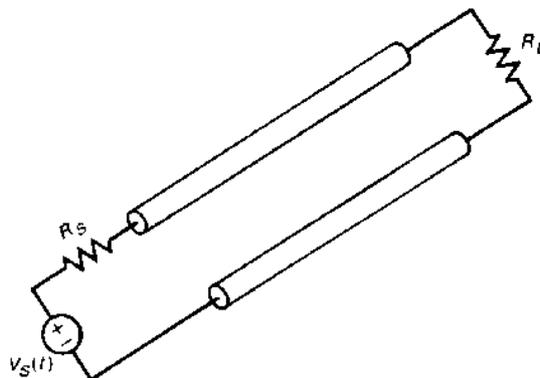
PREMESSE

Come vedremo nel dettaglio, le equazioni che regolano le tensioni e le correnti all'interno di una linea di trasmissione sono equazioni differenziali, alle derivate parziali, dette appunto **equazioni della linea di trasmissione**. Queste equazioni costituiscono il **modello** per la generica linea di trasmissione.

Un primo aspetto da considerare riguarda le caratteristiche dei campi elettrici e magnetici che circondano i conduttori di una linea di trasmissione. La struttura fondamentale di tali campi è quella di un campo elettromagnetico trasversale (TEM): questo significa che i vettori \vec{E} (intensità di campo elettrico) e \vec{H} (intensità di campo magnetico) non presentano mai componenti parallele alla linea di trasmissione. Quindi, quando consideriamo le onde elettromagnetiche che si propagano in una linea e supponiamo un modo TEM di propagazione, ci riferiamo al caso in cui i vettori di campo sono trasversali rispetto alla direzione di propagazione.

Nel seguito considereremo inoltre solo **linee di trasmissione uniformi**: una linea di trasmissione è **uniforme** quando la geometria della sezione trasversale (intesa cioè come la sezione trasversale sia dei conduttori sia del dielettrico) rimane invariata in ogni punto della linea stessa.

Per poter ricavare le equazioni della linea di trasmissione, supponiamo di orientare i due conduttori della linea stessa lungo l'asse z di un sistema di coordinate cartesiane. Tanto per fissare le idee, possiamo pensare di riferirci ad una linea del tipo riportato nella figura seguente, anche se i risultati che otterremo saranno del tutto generali, validi per qualsiasi caso:



L'asse z è dunque quello parallelo ai due conduttori, per cui gli assi x ed y definiscono un piano ortogonale (trasversale) ai conduttori stessi.

Immaginiamo di applicare alla linea una corrente ed una tensione costanti nel tempo. La tensione presente tra i due conduttori determinerà la comparsa di cariche sulla superficie dei fili, le quali quindi generano un campo elettrico $\vec{E}_T(z,t)$ diretto da un conduttore all'altro. Inoltre, la corrente che

circola in un conduttore e torna indietro tramite l'altro crea un campo magnetico $\vec{H}_T(z,t)$ che circonda ciascun filo.

Facciamo per il momento l'ipotesi che la linea sia infinitamente estesa: questo garantisce che non nascano perturbazioni sui campi dovute agli estremi della linea stessa, per cui i campi elettrico e magnetico (nell'ipotesi di modo TEM) giacciono nel piano $[x,y]$ e sono trasversali rispetto all'asse della linea (il che giustifica il pedice "T" usato per indicare tali campi).

C'è però da osservare che questo discorso risulta sempre meno valido all'aumentare della frequenza della tensione e della corrente: infatti i campi manterranno la struttura trasversale fino ad una frequenza limite (detta **frequenza di taglio inferiore**) al di sopra della quale *modi di ordine superiore*, analoghi a quelli delle *guide d'onda*, prendono a propagarsi insieme al modo TEM. Per le linee di dimensioni ordinarie, questi modi di ordine superiore diventano significativi solo per frequenze particolarmente alte (dell'ordine dei GHz), per cui noi le trascuriamo in questo contesto, continuando a ritenere che l'unico modo presente sia il modo TEM.

DEFINIZIONE DI TENSIONE E CORRENTE

Una volta stabilito il tipo di modi che si propagano nella linea, possiamo andare a definire, in modo univoco, la tensione e la corrente per la linea. In particolare, l'ipotesi della presenza del modo TEM facilita di molto i nostri discorsi.

Al fine di definire la tensione e la corrente della linea, consideriamo la **legge di Faraday** e la **legge di Ampere**, nella loro forma integrale. Scelto un arbitrario contorno C che giace nel piano $[x,y]$ (che ricordiamo è perpendicolare all'asse della linea) e presa una altrettanto arbitraria superficie S avente C come contorno, tali leggi fissano i valori delle circuitazioni lungo C rispettivamente del campo elettrico e del campo magnetico:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu \frac{d}{dt} \int_S \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \epsilon \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

dove abbiamo ipotizzato l'impiego di un mezzo per il quale risulti $\vec{B} = \mu\vec{H}$ e $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$.

Dato che il contorno C è ortogonale all'asse della linea, il vettore $d\vec{l}$ non ha componente lungo z ($dl_z=0$), per cui la circuitazione dei campi E ed H coinvolge solo le componenti lungo x e lungo y ; analogamente, il vettore $d\vec{s}$ contiene solo la componente lungo z ($ds_x=ds_y=0$), per cui gli integrali di superficie coinvolgono solo le componenti z dei vettori coinvolti: riscriviamo allora quelle due relazioni nella forma

$$\oint_{C_{xy}} (E_x dx + E_y dy) = -\mu \frac{d}{dt} \int_{S_{xy}} H_z dx dy$$

$$\oint_{C_{xy}} (H_x dx + H_y dy) = \int_{S_{xy}} J_z dx dy + \epsilon \frac{d}{dt} \int_{S_{xy}} E_z dx dy$$

D'altra parte, la caratteristica del modo TEM è quella per cui i campi trasversali sono nulli ($E_z=H_z=0$), per cui quelle relazioni diventano

$$\oint_{C_{xy}} (E_x dx + E_y dy) = 0$$

$$\oint_{C_{xy}} (H_x dx + H_y dy) = \int_{S_{xy}} J_z dx dy$$

A ben vedere, queste sono esattamente le equazioni valide per i campi statici. Di conseguenza, possiamo dare definizioni univoche di tensione e corrente così come siamo abituati a fare per i campi statici:

- per quanto riguarda la **tensione** tra i conduttori, possiamo scrivere che

$$V(z, t) = - \int_{C_v} \vec{E}_T \cdot d\vec{l}$$

dove C_v è un *qualsiasi percorso* che colleghi i due fili della linea e che appartenga al piano trasversale $[x, y]$;

- per quanto riguarda la **corrente** nel generico conduttore, possiamo invece scrivere che

$$I(z, t) = \oint_{C_t} \vec{H}_T \cdot d\vec{l}$$

dove C_t è un *qualsiasi percorso* che circonda il conduttore e che appartiene al piano trasversale $[x, y]$.

Da notare che l'arbitrarietà nella scelta di C_v e C_t rende univoche le due definizioni appena fornite.

Facciamo anche un'altra osservazione, relativa alla corrente: per ogni sezione della linea, le correnti lungo i due fili hanno ugual modulo ma verso opposto; questa proprietà è quella che definisce la cosiddetta **corrente di modo differenziale**; in effetti, però, si può vedere che può esistere anche un'altra corrente lungo i due fili, che abbia modulo e verso uguali su entrambi: è la cosiddetta corrente di **modo comune**. Le equazioni delle linee di trasmissione mettono in evidenza solo la corrente di modo differenziale, per cui ci concentreremo solo su di essa.

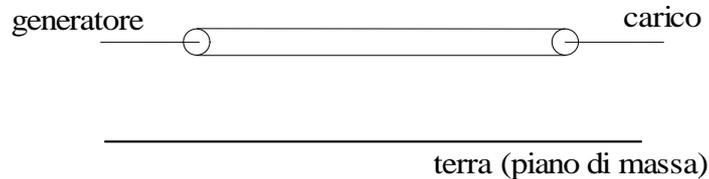
Notiamo inoltre che *sia la tensione sia la corrente sono funzioni sia della posizione z lungo la linea sia del tempo t* . Questo significa che, fissato un istante di osservazione, potremo osservare un andamento di V ed I lungo la linea (cioè al variare di z), così come, fissata una sezione z della linea, potremo osservare in sua corrispondenza un andamento temporale di V ed I .

EQUAZIONI DELLA LINEA DI TRASMISSIONE

Le premesse dei precedenti paragrafi ci consentono di andare a determinare la distribuzione di corrente, delle differenze di potenziale e della potenza trasferita in una linea di trasmissione. Esistono diversi metodi per affrontare questo problema, ma tali metodi possono essere raggruppati sostanzialmente in due gruppi: quelli basati sulla "**teoria delle reti elettriche**" e quelli che derivano dalla "**teoria dell'elettromagnetismo**". Noi seguiamo un metodo relativo alla teoria delle reti elettriche.

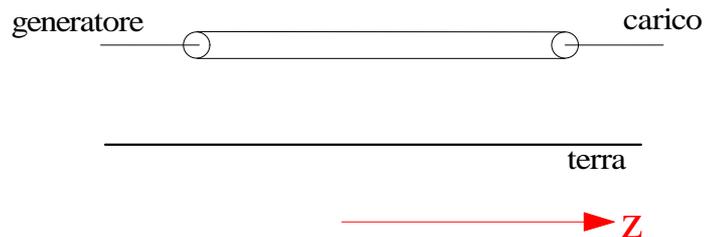
Consideriamo dunque una generica linea di trasmissione utilizzata per il trasporto dell'energia elettrica da un generatore verso un carico. Dato che non intendiamo fare una analisi di tipo elettromagnetico, la natura della linea può essere qualunque, nel senso che potrà trattarsi di un cavo coassiale, di una fibra ottica, di una linea bifilare e così via.

Per semplicità di schematizzazione, consideriamo un conduttore di andata parallelo ad un piano di massa avente la funzione di conduttore di ritorno:



Questa linea avrà una certa lunghezza pari alla distanza tra il generatore ed il carico alimentato. Il generatore applica una certa tensione ad un capo della linea e questa tensione si propaga lungo la linea fino a giungere al carico. Vogliamo allora stabilire in che modo si propaghi tale tensione e, ovviamente, in che modo si propaghi la corrente elettrica che da essa deriva.

Dato che la propagazione avviene intuitivamente dal generatore verso il carico, stabiliamo (per il momento) come direzione di riferimento quella parallela alla linea e orientata in direzione del carico stesso:



Una volta definite, in modo univoco, la tensione e la corrente, possiamo considerare un *tratto infinitesimo* (eletticamente) della linea (supposto di lunghezza dz) e possiamo associare ad esso un **modello circuitale a parametri concentrati**.

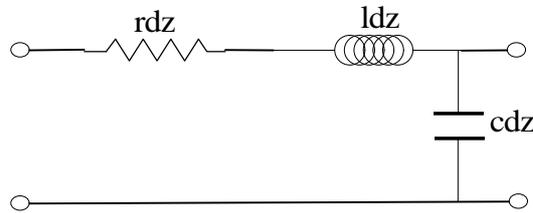
Le considerazioni da fare, per costruire questo modello, sono abbastanza intuitive. In primo luogo, sappiamo che la linea di trasmissione, essendo costituita di materiali conduttori, è caratterizzata da una certa resistenza e da una certa induttanza, entrambe per unità di lunghezza:

- la resistenza rappresenta la corrente di conduzione che fluisce tra i due conduttori;
- l'induttanza tiene invece conto del campo magnetico che, generato dalla corrente di conduzione, attraversa la regione compresa tra i due conduttori stessi: tale induttanza, quindi, rappresenta in pratica la spira formata dall'insieme dei due conduttori.

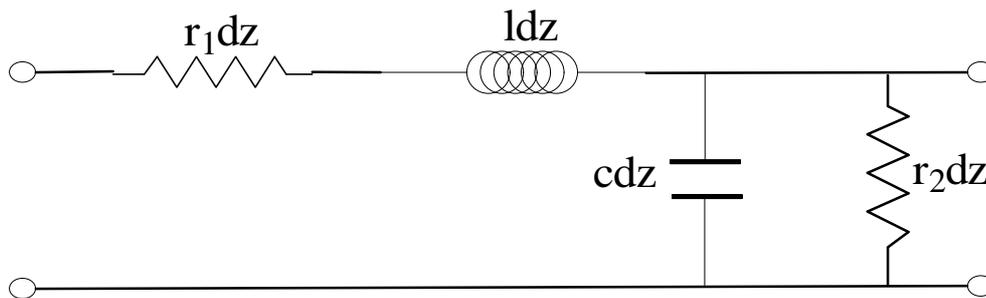
Allora, se indichiamo con R la “resistenza per unità di lunghezza” e con L l’ “induttanza per unità di lunghezza”, è chiaro che il nostro tratto di linea dz sarà caratterizzato da una resistenza $R = rdz$ e da una induttanza $L = ldz$. Possiamo allora cominciare a rappresentarlo nel modo seguente:



La resistenza e l'induttanza sono due parametri che tengono conto dei cosiddetti "*effetti longitudinali*" nella linea; ci sono però anche i cosiddetti "*effetti trasversali*", dovuti al fatto che abbiamo due conduttori in parallelo, tra i quali quindi si sviluppano degli effetti capacitivi¹: indicata allora con C la "**capacità per unità di lunghezza**" della linea², il tratto dz sarà caratterizzato anche da una capacità $C = cdz$ che andiamo a rappresentare nel modo seguente:



Non è ancora finita: la capacità appena inserita è valida solo nel caso in cui il dielettrico compreso tra la linea e la terra presenti conducibilità nulla; al contrario, nella realtà ci sono fenomeni che rendono questa conducibilità non nulla (per cui il dielettrico presenta delle **perdite**³); per tenerne conto, ci basta inserire in parallelo alla capacità una nuova resistenza $R = rdz$: per distinguere questa resistenza da quella considerata prima, usiamo i pedici "1" e "2" come in figura.



Questo è dunque il modello circuitale equivalente attraverso il quale intendiamo descrivere la propagazione dell'onda di tensione e dell'onda di corrente attraverso l'elemento infinitesimo dz della linea di trasmissione considerata. La nostra linea di trasmissione sarà costituita da una cascata di circuiti di questo tipo e terminata ad un estremo della sorgente (generatore di tensione in serie ad una resistenza) ed all'altro dal carico (resistenza).

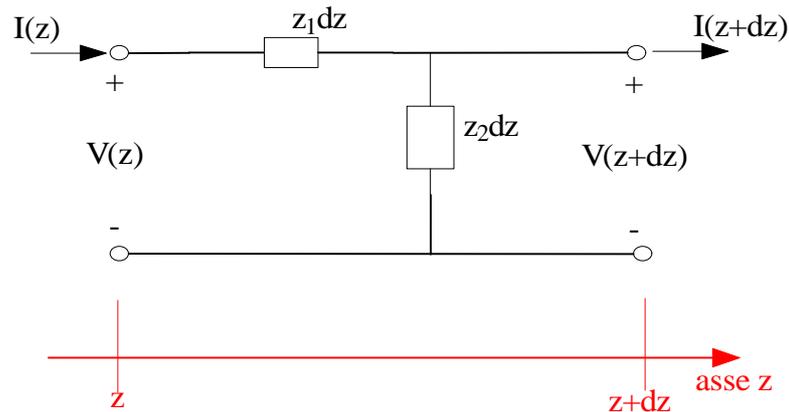
Notiamo una cosa: fino ad ora, non abbiamo ancora fatto alcuna ipotesi sul tipo di segnale che va ad eccitare la linea di trasmissione, per cui non possiamo dire niente circa il regime di corrente e di tensione che si instaura lungo la linea. Vedremo invece che risulta di notevole interesse il caso in cui l'eccitazione sia di tipo sinusoidale isofrequenziale: in questo caso, infatti, una volta raggiunta una condizione di regime (cioè una volta esauriti tutti i possibili fenomeni transitori), le correnti e le tensioni sono a loro volta di tipo sinusoidale. In questa condizione di funzionamento, i 4 elementi circuitali introdotti poco fa possono essere sostituiti con le rispettive impedenze, il che consente di

¹ E' il campo elettrico che circonda i conduttori a creare un effetto capacitivo tra di essi. La capacità per unità di lunghezza rappresenta la corrente di spostamento che fluisce tra i conduttori, la quale è presente per qualsiasi mezzo interposto tra i conduttori, sia con perdite sia senza perdite.

² Dato che la linea è supposta uniforme, la capacità per unità di lunghezza è la stessa per ogni punto della linea. Al contrario, se la linea non fosse uniforme (per effetto di una sezione trasversale variabile), la capacità risulterebbe funzione della posizione lungo la linea, per cui sarebbe una $c=c(z)$.

³ Queste perdite non vanno confuse con quelle della linea, che sono rappresentate dalla resistenza introdotta prima, rappresentativa della corrente di conduzione.

semplificare la serie ed il parallelo che si creano e di ricondursi quindi ad un nostro modello finale del tipo seguente:



dove ovviamente abbiamo posto

$$\dot{z}_1 = (r_1 + j\omega l)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{\dot{y}_2} = \frac{1}{(r_2 + j\omega c)}$$

Ad ogni modo, torniamo al caso di un regime generico. Notiamo che il modello circuitale cui siamo pervenuti è quello di un classico doppio bipolo (o “*elemento biporta*” che dir si voglia). Indichiamo allora con $\mathbf{V}(\mathbf{z}, \mathbf{t})$ ed $\mathbf{I}(\mathbf{z}, \mathbf{t})$ la tensione e la corrente alla porta di ingresso (cioè in corrispondenza della generica sezione z) e con $\mathbf{V}(\mathbf{z}, +\mathbf{dz}, \mathbf{t})$ e $\mathbf{I}(\mathbf{z}, +\mathbf{dz}, \mathbf{t})$ la tensione e la corrente alla porta di uscita (cioè in corrispondenza della sezione $z+\mathbf{dz}$). Entrambe queste coppie (tensione, corrente) sono ovviamente funzioni anche del tempo.

Il nostro scopo è adesso quello di trovare le equazioni che legano le tensioni e le correnti in corrispondenza delle sezioni z e $z+\mathbf{dz}$. Applicando banalmente le leggi di Kirchoff, otteniamo quanto segue:

$$V(z + dz, t) - V(z, t) = -r_1 \cdot dz \cdot I(z, t) - l \cdot dz \cdot \frac{\partial}{\partial t} I(z, t)$$

$$I(z + dz, t) - I(z, t) = -g_2 \cdot dz \cdot V(z + dz, t) - c \cdot dz \cdot \frac{\partial}{\partial t} V(z + dz, t)$$

La prima equazione rappresenta la differenza tra la tensione in uscita e quella in ingresso, così come la seconda equazione rappresenta la differenza tra la corrente in uscita e quella in ingresso.

Affinché questo modello circuitale a parametri concentrati sia valido, occorre che la lunghezza dz sia elettricamente corta rispetto alla lunghezza d’onda⁴. Dobbiamo allora supporre che sia $dz \rightarrow 0$.

Prima ancora di fare questa ipotesi, riscriviamo le ultime due equazioni nel modo seguente, in cui dividiamo primo e secondo membro per dz :

⁴ Ovviamente, stiamo facendo implicitamente l’ipotesi che l’eccitazione della linea sia comunque di tipo periodico, ossia ottenuta come una sovrapposizione di sinusoidi a varie frequenze. Di conseguenza, per stabilire la lunghezza elettrica della linea, si deve far riferimento alla lunghezza d’onda minore, ossia quella associata alla più alta frequenza di utilizzo del modello: infatti, se la linea risulta elettricamente corta rispetto alla lunghezza d’onda più piccola, lo sarà sicuramente anche rispetto alle lunghezze d’onda maggiori (quelle cioè associate a frequenze più basse).

$$\frac{V(z+dz,t) - V(z,t)}{dz} = -r_1 \cdot I(z,t) - l \cdot \frac{\partial}{\partial t} I(z,t)$$

$$\frac{I(z+dz,t) - I(z,t)}{dz} = -g_2 \cdot V(z+dz,t) - c \cdot \frac{\partial}{\partial t} V(z+dz,t)$$

A questo punto, possiamo calcolare il limite per $dz \rightarrow 0$ di entrambi i membri di entrambe le equazioni: ai primi membri otteniamo due derivate (limiti dei rispettivi rapporti incrementali), mentre a secondo membro le tensioni e le correnti alla sezione z tendono a coincidere con quelle alla sezione $z+dz$. Quindi

$$\frac{\partial}{\partial z} V(z,t) = -r_1 \cdot I(z,t) - l \cdot \frac{\partial}{\partial t} I(z,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z,t) = -g_2 \cdot V(z,t) - c \cdot \frac{\partial}{\partial t} V(z,t)$$

Queste sono le **equazioni delle linee di trasmissione**. si tratta di un *sistema accoppiato di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine*.

Notiamo subito che le equazioni appena ricavate sono del tutto generali. Tuttavia, spesso è utile far riferimento ad un caso particolare, relativo alle **linee di trasmissione senza perdite**: sono tali quelle linee in cui non ci sono perdite di potenza né all'interno dei conduttori (quindi $r_1=0$) né all'interno del dielettrico di separazione (quindi $g_2=0$)⁵. La ragione principale che conduce all'ipotesi di linea di trasmissione senza perdite è dovuta al fatto che essa permette di ottenere ragionevoli approssimazioni dei risultati esatti e, allo stesso tempo, semplifica molto i calcoli.

Parametri per unità di lunghezza

Un'altra importante osservazione, circa le equazioni delle linee di trasmissione, è che, in base al discorso fatto, esse sono relative a linee di trasmissione di tipo qualunque; in altre parole, la forma di tali equazioni rimane invariata qualsiasi sia la linea di trasmissione a due conduttori; dove subentra il tipo di linea è nei valori dei parametri per unità di lunghezza (r_1 , c , l e g_2): *tutte le informazioni associate alla geometria della sezione trasversale, al tipo di dielettrico ed al tipo di conduttori, informazioni che cioè sono proprie di una particolare linea, sono contenute soltanto nei parametri per unità di lunghezza.*

SOLUZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO

Una volta ricavate le equazioni delle linee di trasmissione, il passo successivo è ovviamente quello di risolverle, in modo da trovare come variano, rispetto al tempo ed alla posizione, le forme d'onda della tensione $V(z,t)$ tra i due conduttori e della corrente $I(z,t)$ nei due conduttori. E' possibile andare a ricavare due diverse soluzioni:

- la **soluzione nel dominio del tempo** è quella più completa possibile, in quanto viene ricavata senza formulare ipotesi circa l'andamento temporale dei segnali di eccitazione;

⁵ In pratica, i conduttori si suppongono a conduttività infinita, mentre il dielettrico si suppone a conduttività nulla.

- la **soluzione in regime sinusoidale**, invece, presuppone una eccitazione di tipo sinusoidale e si riferisce inoltre ad una condizione di regime sulla linea, ossia ad una condizione in cui si assumono esauriti tutti i possibili fenomeni transitori.

Ci occuperemo diffusamente più avanti della soluzione in regime sinusoidale, mentre adesso vediamo la soluzione nel dominio del tempo. Segnaliamo che, talvolta, si parla di *soluzione transitorio*, ma è un errore, in quanto la soluzione nel dominio del tempo è di tipo globale: essa comprende sia il transitorio sia il regime.

Per semplicità consideriamo il caso di una linea priva di perdite, mentre in seguito, quando prenderemo in esame la soluzione in regime sinusoidale, considereremo anche il caso generale di linee con perdite.

Dire che la linea è senza perdite equivale a dire che $r_1=0$ e $g_2=0$, per cui le equazioni da risolvere sono le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} V(z, t) = -l \cdot \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) \\ \frac{\partial}{\partial z} I(z, t) = -c \cdot \frac{\partial}{\partial t} V(z, t) \end{cases}$$

Il modo di procedere è semplice. Per prima cosa, deriviamo la prima equazione rispetto a z e la seconda rispetto a t :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, t) = -l \cdot \frac{\partial}{\partial z \partial t} I(z, t) \\ \frac{\partial}{\partial t \partial z} I(z, t) = -c \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(z, t) \end{cases}$$

Sostituendo adesso la seconda nella prima, otteniamo una equazione differenziale del secondo ordine nella sola incognita $V(z, t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, t) = -l \cdot \left(-c \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(z, t) \right)$$

In modo del tutto analogo possiamo procedere per ottenere una equazione nella sola incognita $I(z, t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} I(z, t) = -c \cdot \left(-l \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} I(z, t) \right)$$

In definitiva, quindi, ci siamo ricondotti ad un sistema di due equazioni disaccoppiate tra di loro:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, t) = l \cdot c \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(z, t) \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} I(z, t) = l \cdot c \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} I(z, t) \end{cases}$$

E' noto che queste equazioni (formalmente identiche) ammettono soluzioni nella forma seguente:

$$\boxed{\begin{cases} V(z,t) = V^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + V^-\left(t + \frac{z}{v}\right) \\ I(z,t) = I^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + I^-\left(t + \frac{z}{v}\right) \end{cases}}$$

In queste espressioni abbiamo indicato con z_c la cosiddetta **impedenza caratteristica della linea** e con v la **velocità di propagazione** delle onde lungo la linea stessa: le rispettive espressioni sono

$$v = \frac{1}{\sqrt{lc}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$z_c = \sqrt{\frac{l}{c}} = vl = \frac{1}{vc}$$

dove evidentemente μ ed ϵ sono i parametri caratteristici del mezzo (supposto omogeneo) in cui sono immersi i conduttori.

Facciamo allora qualche considerazione circa le soluzioni trovate per $V(z,t)$ e $I(z,t)$. Data la perfetta analogia tra queste soluzioni, possiamo ragionare su una sola di esse e consideriamo perciò, ad esempio, la tensione.

Abbiamo trovato che $V(z,t)$ è la somma di due funzioni, una di argomento $v-z/v$ e l'altra di argomento $v+z/v$. L'espressione esplicita di tali funzioni dipende strettamente dal tipo di eccitazione e sarà perciò esaminata quando considereremo il caso particolare di eccitazione sinusoidale. In generale, però, le due funzioni mostrano già le rispettive caratteristiche:

- la funzione $V^+\left(t - \frac{z}{v}\right)$ rappresenta un'onda che si muove nella direzione positiva delle z (quindi dalla sorgente verso il carico per come abbiamo fissato precedentemente il nostro riferimento) e prende perciò il nome di **onda progressiva** (in questo caso di tensione, ma valgono le stesse considerazioni per quella di corrente);
- dualmente, la funzione $V^-\left(t + \frac{z}{v}\right)$ rappresenta un'onda che si muove nella direzione negativa delle z (quindi dal carico verso la sorgente) e prende perciò il nome di **onda regressiva** (di tensione e/o di corrente).

La soluzione complessiva, che cioè ci da l'andamento effettivo della tensione lungo la linea ed al variare del tempo, è dunque la somma delle onde progressive e delle onde regressive. La corrente associata a ciascuna onda è poi legata alla tensione di quell'onda per mezzo della impedenza caratteristica prima introdotta:

$$I^+\left(t - \frac{z}{v}\right) = \frac{1}{z_c} V^+\left(t - \frac{z}{v}\right)$$

$$I^-\left(t + \frac{z}{v}\right) = -\frac{1}{z_c} V^-\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

Queste relazioni consentono di riscrivere la soluzione trovata nella forma

$$\boxed{\begin{cases} V(z,t) = V^+ \left(t - \frac{z}{v} \right) + V^- \left(t + \frac{z}{v} \right) \\ I(z,t) = \frac{1}{z_c} I^+ \left(t - \frac{z}{v} \right) - \frac{1}{z_c} I^- \left(t + \frac{z}{v} \right) \end{cases}}$$

Fenomeno della riflessione

Cerchiamo adesso di capire ancor più nel dettaglio il meccanismo secondo cui si generano onde progressive e onde regressive lungo la linea in esame.

Consideriamo una linea di lunghezza totale L . In corrispondenza del carico ($z=L$), la tensione e la corrente, in un arbitrario istante t , valgono

$$\begin{cases} V_L(t) = V(L,t) = V^+ \left(t - \frac{L}{v} \right) + V^- \left(t + \frac{L}{v} \right) \\ I_L(t) = I(L,t) = I^+ \left(t - \frac{L}{v} \right) - I^- \left(t + \frac{L}{v} \right) \end{cases}$$

Si definisce **coefficiente di riflessione del carico** il rapporto tra l'onda regressiva di tensione e l'onda progressiva di tensione:

$$\Gamma_L = \frac{V^- \left(t + \frac{L}{v} \right)}{V^+ \left(t - \frac{L}{v} \right)}$$

Questa relazione, scritta in altro modo, dice sostanzialmente che, a causa della presenza dell'onda progressiva di tensione, il carico genera un'onda regressiva di tensione la cui ampiezza è Γ_L volte quella dell'onda progressiva:

$$\boxed{V^- \left(t + \frac{L}{v} \right) = \Gamma_L \cdot V^+ \left(t - \frac{L}{v} \right)}$$

Oltre a questo, considerando il legame esistente tra le onde progressiva e regressiva di tensione e quelle progressiva e regressiva di corrente, è immediato accorgersi che

$$\boxed{I^- \left(t + \frac{L}{v} \right) = -\Gamma_L \cdot I^+ \left(t - \frac{L}{v} \right)}$$

Analogamente a prima, possiamo dire che a causa della presenza dell'onda progressiva di corrente, il carico genera un'onda regressiva di corrente la cui ampiezza è Γ_L volte quella dell'onda progressiva ma di segno contrario.

E' abbastanza facile trovare una espressione significativa del coefficiente di riflessione sul carico: infatti, dobbiamo tener conto che la tensione totale $V_L(t)$ sul carico è semplicemente quella dovuta alla corrente $I_L(t)$ che attraversa il carico stesso, per cui scriviamo che

$$V_L(t) = R_L I_L(t) = R_L \left[\frac{1}{z_c} V^+ \left(t - \frac{L}{v} \right) - \frac{1}{z_c} V^- \left(t + \frac{L}{v} \right) \right]$$

D'altra parte, avendo visto che questa stessa tensione può essere scritta, in generale, nella forma

$$V_L(t) = V(L,t) = V^+ \left(t - \frac{L}{v} \right) + V^- \left(t + \frac{L}{v} \right)$$

otteniamo, uguagliando i secondi membri delle ultime due equazioni, che

$$R_L \left[\frac{1}{z_c} V^+ \left(t - \frac{L}{v} \right) - \frac{1}{z_c} V^- \left(t + \frac{L}{v} \right) \right] = V^+ \left(t - \frac{L}{v} \right) + V^- \left(t + \frac{L}{v} \right)$$

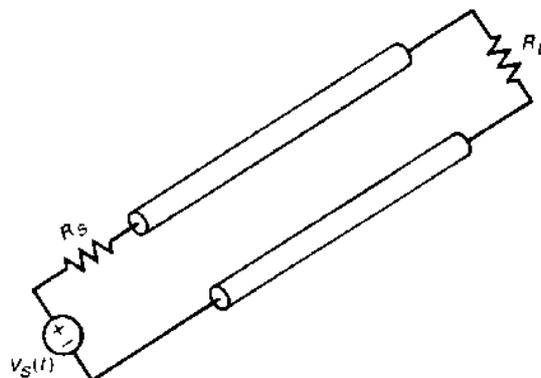
Se dividiamo ambo i membri per $V^+ \left(t - \frac{L}{v} \right)$, otteniamo una equazione nell'incognita Γ_L , che quindi può essere determinata:

$$R_L \left[\frac{1}{z_c} - \frac{1}{z_c} \Gamma_L \right] = 1 + \Gamma_L \longrightarrow \frac{R_L}{z_c} - \frac{R_L}{z_c} \Gamma_L = 1 + \Gamma_L \longrightarrow \boxed{\Gamma_L = \frac{R_L - z_c}{R_L + z_c}}$$

Abbiamo dunque ottenuto che il coefficiente di riflessione sul carico è univocamente determinato dal carico e dalla impedenza caratteristica della linea considerata.

In pratica, il processo di riflessione può essere visto come quello di uno specchio che riproduce V^- come immagine di V^+ : tutti i punti della forma d'onda V^- sono i corrispondenti di quelli della forma d'onda V^+ , moltiplicati per il coefficiente di riflessione.

Vediamo di spiegarci ancora meglio. Consideriamo sempre la generica linea della figura seguente, alimentata da un generatore $V_S(t)$ con resistenza serie R_S e chiusa su un carico R_L :

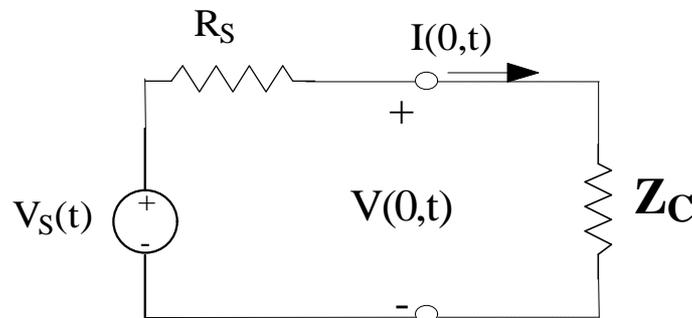


Supponiamo di avviare l'eccitazione all'istante $t=0$. Si crea immediatamente un'onda progressiva che comincia a propagarsi lungo i conduttori, diretta verso il carico. Fin quando tale onda non raggiunge il carico, non c'è alcuna onda riflessa, proprio perché non si è ancora verificato alcun processo di riflessione. Se v è la velocità di propagazione dell'onda, essa impiega un tempo $T=L/v$ per raggiungere il carico; quindi, all'istante $t=T$, si genera l'onda riflessa, che è una frazione (pari a

Γ_L) di quella incidente, la quale prende a propagarsi verso la sorgente; essa impiega un ulteriore tempo T per raggiungere alla sorgente (posta in $z=0$). Quindi, in corrispondenza della sorgente, non appare alcuna onda regressiva nell'intervallo di tempo $[0,2T]$, per cui, in tale intervallo, la tensione e la corrente in $z=0$ saranno determinate solo dalle onde progressive V^+ e I^+ : scriviamo dunque che

$$0 \leq t \leq 2T: \quad \begin{cases} V(0,t) = V^+ \left(t - \frac{0}{v} \right) \\ I(0,t) = I^+ \left(t - \frac{0}{v} \right) = \frac{1}{z_C} V^+ \left(t - \frac{0}{v} \right) \end{cases}$$

E' evidente che, in $z=0$ e per $0 \leq t \leq 2T$, il rapporto tra la tensione totale e la corrente totale risulta pari a z_C , per cui questa è l'impedenza di ingresso della linea in questo intervallo di tempo. Il tutto è riassunto dal circuito seguente, valido appunto per $0 \leq t \leq 2T$, nel quale la linea ed il carico vengono sostituiti dall'impedenza di ingresso vista dalla sorgente:



Risolvendo questo circuito, troviamo banalmente che la tensione e la corrente in corrispondenza di $z=0$ valgono

$$V(0,t) = \frac{z_C}{R_S + z_C} V_S(t)$$

$$I(0,t) = \frac{1}{R_S + z_C} V_S(t)$$

Queste relazioni mostrano che le onde generate nella fase iniziale ($0 \leq t \leq 2T$) hanno lo stesso andamento della sorgente di tensione.

Una volta generata, l'onda viaggia dunque in direzione del carico e impiega un tempo T per raggiungerlo. Una volta raggiunto il carico, si genera un segnale riflesso, che impiega un ulteriore tempo T per raggiungere nuovamente la sorgente. Qui si verifica un ulteriore riflessione, secondo un **coefficiente di riflessione della sorgente** così definito:

$$\Gamma_S = \frac{V_{\text{incidente}}(0,t)}{V_{\text{riflessa}}(0,t)}$$

In questo caso, l'onda incidente è quella che è stata riflessa dal carico (per cui si è propagata dal carico verso la sorgente), mentre l'onda riflessa è la frazione di quest'onda che viene riflessa dal sorgente (e che quindi si muove nuovamente verso il carico).

Con un discorso perfettamente analogo a quello fatto per il coefficiente di riflessione sul carico, si può trovare la seguente espressione del coefficiente di riflessione della sorgente:

$$\Gamma_s = \frac{R_s - z_c}{R_s + z_c}$$

In sostanza, quindi, un'onda progressiva viene generata in corrispondenza della sorgente in modo del tutto analogo a quanto accade per la generazione di un'onda regressiva in corrispondenza del carico.

Questo processo di **successive riflessioni** si itera attraverso nuove riflessioni, sia alla sorgente sia al carico. In ogni istante, la tensione totale è data, per ogni punto della linea, dalla somma di tutte le singole onde di tensione che transitano in quell'istante in quel punto della linea. Analogamente vale ovviamente per la corrente.

Esempio

Possiamo anche fare un esempio concreto di quanto appena detto. Supponiamo che la generica linea venga alimentata, nell'istante $t=0$, da una batteria di 30 V con resistenza serie nulla. La linea ha una lunghezza $L=400\text{m}$ ed una impedenza caratteristica $z_c=50\Omega$ e la velocità di propagazione in essa è $v=200\text{ m}/\mu\text{sec}$. Tale linea è inoltre chiusa su un carico puramente resistivo di valore $R_L=100\Omega$.

Con questi valori, i coefficienti di riflessione alla sorgente ed al carico risultano essere i seguenti:

$$\Gamma_L = \frac{R_L - z_c}{R_L + z_c} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3} \qquad \Gamma_s = \frac{R_s - z_c}{R_s + z_c} = \frac{0 - 50}{0 + 50} = -1$$

Queste espressioni ci dicono quanto segue: in corrispondenza del carico, la riflessione produce un'onda con ampiezza 1/3 di quella incidente; in corrispondenza della sorgente, la riflessione produce un'onda di ampiezza uguale a quella dell'onda incidente ma con segno cambiato. Vediamo allora in cosa questo si traduce.

Abbiamo detto che all'istante $t=0$ viene applicato ai capi della linea un gradino di 30V. Questo gradino prende a propagarsi verso il carico, che raggiunge dopo un tempo $T=L/v=2\mu\text{sec}$. Quindi, nell'intervallo $[0,2\mu\text{sec}]$, la tensione lungo la linea risulta nulla prima dell'arrivo dell'impulso e pari a 30V dopo il passaggio di quest'ultimo.

All'istante $t=2\mu\text{sec}$, la tensione lungo tutta la linea è di 30V e si è inoltre generata un'onda riflessa in corrispondenza del carico. L'ampiezza di tale onda è 1/3 di quella incidente, per cui vale 10 V. Questo nuovo impulso si propaga verso la sorgente, che raggiunge dopo altri $2\mu\text{sec}$. Quindi, in $t=4\mu\text{sec}$, la tensione su tutta la linea è di +40V, somma dell'onda incidente (+30V) e di quella riflessa (+10V).

Quando l'onda riflessa arriva alla sorgente ($t=4\mu\text{sec}$), c'è una ulteriore riflessione, per cui si genera una nuova onda progressiva, di ampiezza uguale a contraria a quella incidente, per cui -10V. Nell'istante $t=6\mu\text{sec}$, quest'onda arriva al carico, per cui la tensione lungo tutta la linea $+30V+10V-10V=+30V$.

La riflessione da ora origine ad una nuova onda regressiva, di ampiezza $10/3=3,33\text{ V}$, che viene nuovamente inviata verso la sorgente.

In generale, questo meccanismo prosegue indefinitamente, ma si arriva ad un istante in cui la tensione sulla linea si assesta asintoticamente. In particolare, ci si può rendere conto facilmente che la tensione sul carico si assesta asintoticamente sul valore che ci si aspetta in condizioni di regime e cioè ovviamente **+30V**. La corrispondente corrente (asintotica) si ottiene dividendo tale tensione per i 100Ω del carico, ma si potrebbe ovviamente giungere allo stesso risultato indagando sulle onde corrente così come prima abbiamo indagato sulle onde di tensione.

Soluzione in regime sinusoidale permanente: Equazione dei telegrafisti

INTRODUZIONE

Adesso, possiamo ripetere le considerazioni fatte nei precedenti paragrafi, al fine di ricavare le equazioni delle linee di trasmissione, ma mettendoci nell'ipotesi particolare che sulla linea si sia instaurato un **regime permanente di tipo sinusoidale**.

La prima ipotesi è dunque quella per cui la sorgente abbia una forma sinusoidale, che sappiamo di poter scrivere nel modo seguente:

$$V_s(t) = V_s \cos(\omega t) = \operatorname{Re}\{V_s e^{j\omega t}\}$$

A questa particolare forma d'onda sappiamo di poter associare il fasore equivalente $\bar{V}_s = V_s \angle 0^\circ$, dove la fase nulla indica che stiamo prendendo questo fasore come riferimento per tutti gli altri.

La seconda ipotesi consiste nell'assumere che la sorgente sia stata connessa alla linea per un tempo sufficiente alla estinzione di tutti i fenomeni transitori, lasciando così che in ciascun punto della linea si stabilizzino tensioni e correnti con andamento sinusoidale. Ciò significa che anche queste tensioni e correnti saranno suscettibili di una rappresentazione fasoriale e cioè quindi che potremo comodamente ragionare nel dominio dei fasori, da cui poi risalire al dominio dei tempi (che è quello di interesse pratico):

$$V(z, t) = \operatorname{Re}\{\bar{V}(z) e^{j\omega t}\}$$

$$I(z, t) = \operatorname{Re}\{\bar{I}(z) e^{j\omega t}\}$$

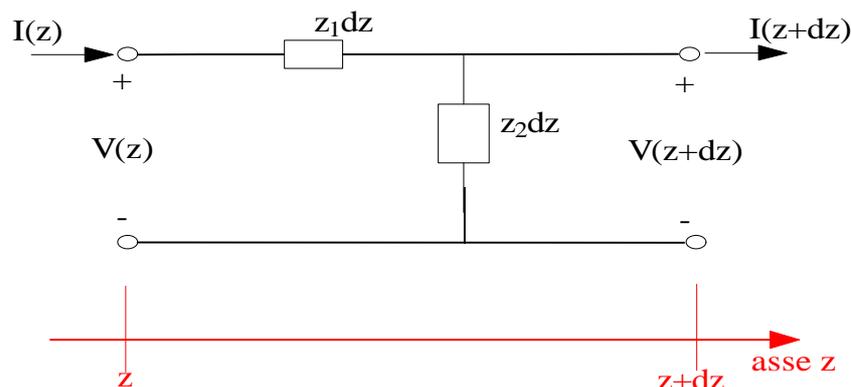
Per semplicità di notazione, nei prossimi paragrafi eviteremo di indicare il trattino orizzontale per contrassegnare i fasori e converremo di distinguere tali fasori dalle quantità nel dominio del tempo tramite l'uso delle lettere minuscole. Quindi, adotteremo la seguente simbologia:

$$v(z, t) = \operatorname{Re}\{V(z, \omega)\} = \operatorname{Re}\{V(z) e^{j\omega t}\}$$

$$i(z, t) = \operatorname{Re}\{I(z, \omega)\} = \operatorname{Re}\{I(z) e^{j\omega t}\}$$

CIRCUITO EQUIVALENTE DI UN TRATTO INFINITESIMO DI LINEA

Nell'ipotesi di essere in **regime sinusoidale permanente**, abbiamo già visto in precedenza che il modello circuitale equivalente del generico tratto dz della linea è il seguente:



$$\dot{z}_1 = (r_1 + j\omega l)$$

dove abbiamo posto $\dot{z}_2 = \frac{1}{\dot{y}_2} = \frac{1}{(r_2 + j\omega c)}$

Procediamo allora così come abbiamo fatto nel caso di un regime generico, tenendo conto che adesso non siamo più nel dominio del tempo, ma nel dominio dei fasori, per cui le quantità con cui abbiamo a che fare sono tutte fasoriali (cioè sostanzialmente numeri complessi cui sono associate forme d'onda sinusoidali)⁶.

Applicando la LKT in senso orario, abbiamo che

$$V(z) = (z_1 dz)I(z) + V(z + dz) = I(z)(r_1 + j\omega l)dz + V(z + dz)$$

Possiamo sicuramente porre $V(z + dz) = V(z) + dV$, per cui, effettuando la sostituzione, otteniamo

$$V(z) = (z_1 dz)I(z) + V(z) + dV$$

da cui ricaviamo evidentemente che

$$dV = -Iz_1 dz$$

In modo analogo, applicando la LKC otteniamo che

$$I(z) = (V(z) + dV)y_2 dz + I(z + dz) = (V(z) + dV)(g_2 + j\omega c)dz + I(z + dz)$$

Ponendo anche per le correnti $I(z + dz) = I(z) + dI$, abbiamo che

$$I(z) = y_2(V(z) + dV)dz + I(z) + dI$$

da cui, esplicitando dI , otteniamo

$$dI = -y_2(V(z) + dV)dz = -y_2 V(z)dz - y_2 dVdz$$

Il termine $y_2 dVdz$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto al termine $y_2 V(z)dz$ e quindi lo possiamo trascurare: otteniamo in tal modo che

$$dI = -V(z)y_2 dz$$

In conclusione, abbiamo ricavato il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del 1° ordine a coefficienti costanti:

equazioni dei telegrafisti $\begin{cases} dV = -I(z)z_1 dz \\ dI = -V(z)y_2 dz \end{cases}$

⁶ Osserviamo una cosa: dal momento che siamo nel dominio dei fasori, sappiamo che la derivata temporale di una quantità sinusoidale equivale a moltiplicare il corrispondente fasore per $j\omega$. Questa operazione è stata implicitamente già fatta quando abbiamo considerato il circuito equivalente direttamente in termini delle impedenze z_1 e z_2 , nelle quali infatti capacità ed induttanze risultano moltiplicate per $j\omega$.

Dal discorso fatto, si deduce immediatamente che *il sistema ottenuto è valido per una linea di trasmissione qualunque*. Questo significa che, a prescindere da come sia fatta la linea, se vogliamo analizzare la propagazione della tensione e della corrente in tale linea, possiamo sempre riferirci a quelle equazioni. Naturalmente, dove la natura della linea subentra è nei valori dei parametri z_1 e y_2 caratteristici della linea stessa.

RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DEI TELEGRAFISTI

Il sistema di equazioni differenziali ottenuto nel paragrafo precedente si può risolvere facilmente, ma è bene tenere presente che la sua soluzione risulta essere UNICA solo a patto di conoscere le condizioni al contorno, ossia i valori di tensione e di corrente in corrispondenza di una qualsiasi sezione della linea. Allora, noi ci preoccupiamo prima della sua risoluzione e poi individueremo quali sono le condizioni al contorno⁷.

Intanto, il sistema può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \frac{dV(z)}{dz} = -I(z)z_1 \\ \frac{dI(z)}{dz} = -V(z)y_2 \end{cases}$$

Esso andrebbe risolto con il metodo tradizionale degli autovalori. Tuttavia, data la sua forma, possiamo risolverlo così come abbiamo fatto in precedenza. Consideriamo la prima equazione e differenziamola rispetto a z : otteniamo

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -z_1 \frac{dI(z)}{dz}$$

Adesso, al posto di dI/dz sostituiamo il secondo membro della seconda equazione e portiamo tutto al primo membro: ciò che otteniamo è

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - z_1 y_2 V(z) = 0$$

e questa è una normale equazione differenziale del 2° ordine nella sola incognita $V(z)$ (fasore associato alla tensione in corrispondenza della sezione z della linea).

Per comodità e per motivi che saranno chiari tra poco, poniamo

$$\boxed{\gamma^2 = z_1 y_2}$$

in modo che l'equazione diventi

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - \gamma^2 V(z) = 0$$

⁷ Questa osservazione valeva anche prima, quando abbiamo considerato una eccitazione generica, ma in quel caso non ci siamo occupati delle espressioni esplicite dell'onda progressiva e regressiva per cui era superfluo parlare delle costanti.

Alla costante γ si dà il nome di "**costante di propagazione**": essendo pari alla radice del prodotto di due numeri in generale complessi, sarà anch'essa complessa, per cui la possiamo esprimere nella forma generica

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

dove α prende il nome di "**costante di attenuazione**", mentre β prende il nome di "**costante di fase**". Tutte e tre queste definizioni saranno più chiare tra poco.

Tornando all'equazione differenziale, la risolviamo con il tradizionale metodo dell'*equazione caratteristica*, che è

$$s^2 - \gamma^2 = 0$$

Risolvendola, si ricava che $s_{1/2} = \pm\gamma$, per cui l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$V(z) = A_1 e^{\gamma z} + A_2 e^{-\gamma z}$$

Naturalmente, una volta ottenuto l'andamento spaziale della tensione, possiamo facilmente ricavarci quello della corrente: infatti, la seconda equazione differenziale che abbiamo ottenuto era

$$I(z) = -\frac{1}{z_1} \frac{dV(z)}{dz}$$

e da essa ci ricaviamo facilmente che

$$I(z) = -\frac{1}{z_1} \frac{d}{dz} (A_1 e^{\gamma z} + A_2 e^{-\gamma z}) = -\frac{\gamma}{z_1} A_1 e^{\gamma z} + \frac{\gamma}{z_1} A_2 e^{-\gamma z}$$

In conclusione, le leggi con cui si propagano spazialmente, lungo la linea, la tensione e la corrente sono le seguenti:

$$\begin{cases} V(z) = A_1 e^{\gamma z} + A_2 e^{-\gamma z} \\ I(z) = -\frac{\gamma}{z_1} A_1 e^{\gamma z} + \frac{\gamma}{z_1} A_2 e^{-\gamma z} \end{cases}$$

In queste due equazioni si osserva che sia la tensione sia la corrente risultano essere somma di due onde: c'è un'onda che si propaga lungo la direzione positiva dell'asse z , cui diamo perciò il nome di **onda diretta** (o *progressiva*), e c'è un'onda che si propaga lungo la direzione negativa dell'asse z , cui diamo perciò il nome di **onda riflessa**. Per evidenziare ancora meglio questo fatto, poniamo

$$\begin{cases} V_r = A_1 \longleftarrow \text{ampiezza onda riflessa di tensione} \\ V_i = A_2 \longleftarrow \text{ampiezza onda diretta di tensione} \\ I_r = -\frac{\gamma}{z_1} A_1 \longleftarrow \text{ampiezza onda riflessa di corrente} \\ I_i = \frac{\gamma}{z_1} A_2 \longleftarrow \text{ampiezza onda diretta di corrente} \end{cases}$$

per cui il sistema che d'ora in poi considereremo diventa

$$\begin{cases} V(z) = V_r e^{\gamma z} + V_i e^{-\gamma z} \\ I(z) = I_r e^{\gamma z} + I_i e^{-\gamma z} \end{cases}$$

Osservazione: tensione e corrente nel dominio del tempo

E' opportuno ricordare ancora una volta che il sistema di equazioni ottenuto nel paragrafo precedente è relativo al dominio dei fasori: $V(z)$ ed $I(z)$ sono infatti i fasori associati alle forme d'onda della tensione e della corrente lungo la linea. Per risalire, da tali fasori, alle corrispondenti grandezze sinusoidali nel dominio del tempo, si devono applicare le note formule di trasformazione, che consistono nel moltiplicare i fasori per $e^{j\omega t}$ (dove ω è la pulsazione di lavoro) e nell'applicare successivamente l'operatore *parte reale*:

$$\begin{cases} v(z, t) = \text{Re}[V(z, \omega)] = \text{Re}[V(z)e^{j\omega t}] = \text{Re}[(V_r e^{\gamma z} + V_i e^{-\gamma z})e^{j\omega t}] \\ i(z, t) = \text{Re}[I(z, \omega)] = \text{Re}[I(z)e^{j\omega t}] = \text{Re}[(I_r e^{\gamma z} + I_i e^{-\gamma z})e^{j\omega t}] \end{cases}$$

Ad ogni modo, prima di proseguire i nostri discorsi, possiamo fare alcune considerazioni circa $V(z, \omega)$ e $I(z, \omega)$. Consideriamo per esempio la tensione, visto che il discorso sulla corrente è identico. Presa una generica sezione z , la tensione in z è dunque data da

$$V(z, \omega) = A_1 e^{\gamma z} e^{j\omega t} + A_2 e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$$

Vediamo di fare qualche ulteriore calcolo su questa formula: lavorando sugli esponenziali, abbiamo che

$$\begin{aligned} e^{\gamma z} e^{j\omega t} &= e^{(\alpha + j\beta)z + j\omega t} = e^{\alpha z} e^{j(\beta z + \omega t)} \\ e^{-\gamma z} e^{j\omega t} &= e^{-(\alpha + j\beta)z + j\omega t} = e^{\alpha z} e^{j(-\beta z + \omega t)} \end{aligned}$$

per cui possiamo scrivere che

$$V(z, \omega) = A_1 e^{\alpha z} e^{j(\beta z + \omega t)} + A_2 e^{\alpha z} e^{j(-\beta z + \omega t)}$$

In base a questa relazione, $V(z, \omega)$ è la somma di due onde, ciascuna caratterizzata da un termine reale $e^{\alpha z}$, indipendente dal tempo ma dipendente dalla posizione z , e da un termine complesso $e^{j(\pm\beta z + \omega t)}$, dipendente sia dal tempo sia dalla posizione. A quest'ultimo termine si dà in particolare il nome di **fattore di fase**: questo nome deriva dal fatto che esso definisce la cosiddetta **fase** dell'onda, che è infatti $\varphi = \beta z + \omega t$ per la prima onda e $\varphi = -\beta z + \omega t$ per la seconda.

A questo punto, possiamo dare una definizione:

Def. Si definisce "**velocità di fase**" la velocità con cui un osservatore deve viaggiare per vedere l'onda con fase costante.

Nota la fase dell'onda, è possibile calcolare la velocità di fase dell'onda stessa: nel nostro caso, abbiamo un'onda che viaggia con fase pari a $\varphi_1 = +\beta z + \omega t$ e un'onda che viaggia con fase pari a $\varphi_2 = -\beta z + \omega t$; differenziando rispetto a z entrambe le relazioni, otteniamo

$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= +\beta dz + \omega dt \\ d\varphi_2 &= -\beta dz + \omega dt \end{aligned}$$

Se un osservatore viaggia vedendo l'onda numero 1 con fase costante, è chiaro che $d\varphi_1=0$; in modo analogo, se un osservatore viaggia vedendo l'onda numero 2 con fase costante, deve essere $d\varphi_2=0$. Abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} 0 &= +\beta dz + \omega dt \\ 0 &= -\beta dz + \omega dt \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che le rispettive velocità di fase sono

$$\begin{aligned} v_{p,1} &= \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{\beta} \\ v_{p,2} &= \frac{dz}{dt} = +\frac{\omega}{\beta} \end{aligned}$$

(dove il pedice "P" sta per "phase").

Tutto ciò ci consente di osservare quanto segue:

- l'onda di tensione $A_1 e^{\alpha z} e^{j(\beta z + \omega t)}$ si propaga con velocità di fase $v_{p,1}$ negativa, ossia dal carico verso il generatore (visto che stiamo considerando un'asse z diretta verso il carico): essa prende dunque il nome di **onda riflessa**;
- al contrario, l'onda di tensione $A_2 e^{\alpha z} e^{j(-\beta z + \omega t)}$, si propaga con velocità di fase $v_{p,2}$ positiva (uguale, comunque, in modulo all'altra), ossia dal generatore verso il carico: parliamo in questo caso di **onda diretta**.

Da quanto appena detto si capiscono un paio di cose:

- in primo luogo, si comprende il significato dei nomi "costante di attenuazione" per α e "costante di fase" per β ;
- in secondo luogo, come sarà anche più chiaro in seguito, si osserva che la diminuzione del modulo della tensione dal generatore al carico è dovuta alla presenza dell'onda riflessa; di qui, si comprende come il nostro scopo sia sempre quello di limitare al minimo, se non addirittura eliminare, l'onda riflessa.

IMPEDENZA CARATTERISTICA DELLA LINEA

Torniamo adesso a ragionare sui fasori $V(z)$ e $I(z)$ date dalle relazioni

$$\begin{cases} V(z) = V_r e^{\gamma z} + V_i e^{-\gamma z} \\ I(z) = I_r e^{\gamma z} + I_i e^{-\gamma z} \end{cases}$$

Possiamo definire un importante parametro caratteristico della linea: si definisce **impedenza caratteristica** della linea considerata il rapporto tra l'onda incidente di tensione e l'onda incidente di corrente:

$$z_C = \frac{V_i}{I_i} = \frac{z_1}{\gamma}$$

Ricordando che $\gamma^2 = z_1 y_2$, possiamo riscrivere l'impedenza caratteristica nella forma

$$z_C = \sqrt{\frac{z_1}{y_2}} = \sqrt{\frac{r_1 + j\omega\ell}{g_1 + j\omega c}}$$

dove, ovviamente, $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione angolare dell'onda applicata dal generatore.

L'impedenza caratteristica z_C e la costante di propagazione γ rientrano nella categoria dei **parametri secondari** di una linea, mentre i parametri r_1, ℓ, c, g_2 sono **parametri primari**. E' evidente che i parametri secondari dipendono solo dal valore dei parametri primari, i quali, come detto in precedenza, tengono conto della natura fisica della linea considerata.

Volendo esprimere $V(z)$ e $I(z)$ in funzione dell'impedenza caratteristica, basta tener conto che $I_r = -\frac{\gamma}{z_1} V_r$ e che $I_i = \frac{\gamma}{z_1} V_i$, per cui abbiamo che

$$\begin{cases} V(z) = V_r e^{\gamma z} + V_i e^{-\gamma z} \\ I(z) = -\frac{V_r}{z_C} e^{\gamma z} + \frac{V_i}{z_C} e^{-\gamma z} \end{cases}$$

Queste equazioni possono anche essere espresse in altro modo, sfruttando le funzioni Seno Iperbolico e Coseno Iperbolico: queste funzioni sono definite mediante le formule

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

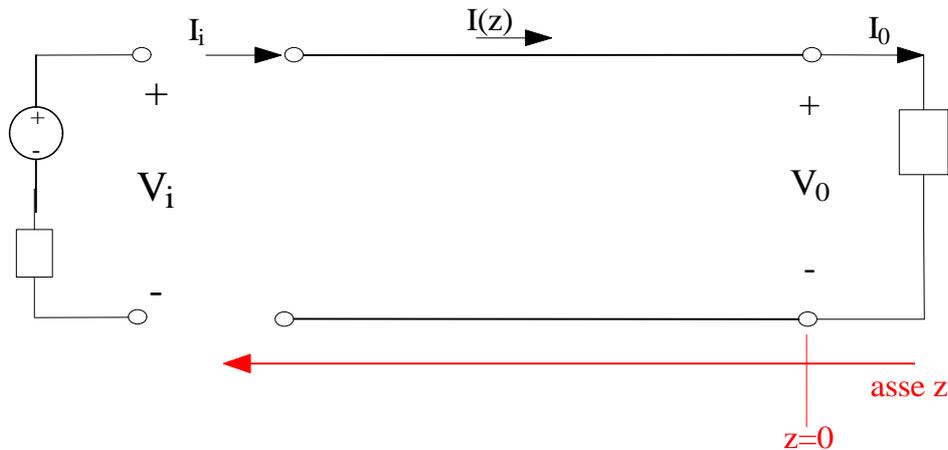
Allora, facendo un po' di passaggi, si trova che le equazioni di V e di I possono essere scritte nella forma

$$\begin{cases} V(z) = C \cosh(\gamma z) + D \sinh(\gamma z) \\ I(z) = \frac{1}{z_C} [-C \sinh(\gamma z) - D \cosh(\gamma z)] \end{cases}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

Nelle espressioni di $V(z)$ e $I(z)$ compaiono delle costanti di integrazione C e D (che, in generale, risultano complesse), che vanno determinate sulla base delle condizioni al contorno del problema. Vediamo allora quali possono essere queste condizioni al contorno.

Lo schema intuitivo cui fare riferimento è il seguente:



Si osserva subito che, in questo caso, l'origine del sistema di riferimento è stata presa sul carico e l'orientazione dell'asse z è quella che va dal carico verso il generatore: è facile verificare che, con questa scelta del sistema di riferimento e nell'ipotesi che la tensione e la corrente sul carico siano rispettivamente $V(z = 0) = V_0$ e $I(z = 0) = I_0$, le equazioni di $V(z)$ e $I(z)$ diventano

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cosh(\gamma z) + z_c I_0 \sinh(\gamma z) \\ I(z) = \frac{V_0}{z_c} \sinh(\gamma z) + I_0 \cosh(\gamma z) \end{cases}$$

D'ora in poi, salvo diverso avviso, tutti i nostri ragionamenti saranno basati su queste due equazioni.

Osservazione

Facciamo osservare che, se avessimo conservato il riferimento $z=0$ sul generatore, l'orientazione dell'asse z dal generatore verso il carico e le condizioni al contorno $V(z = 0) = V_g$ e $I(z = 0) = I_g$, le espressioni di $V(z)$ e $I(z)$ sarebbero diventate

$$\begin{cases} V(z) = V_g \cosh(\gamma z) - z_c I_g \sinh(\gamma z) \\ I(z) = \frac{1}{z_c} [-V_g \sinh(\gamma z) + z_c I_g \cosh(\gamma z)] \end{cases}$$

CASO PARTICOLARE: ASSENZA DI PERDITE ($\alpha=0$)

Vediamo come si modificano le espressioni di $V(z)$ e $I(z)$ se supponiamo che lungo la linea non ci siano perdite (si parla in questo caso di "**linea ideale**"): ciò significa supporre che $\alpha = 0$, ossia che sia nulla la parte reale di $\gamma = \sqrt{z_1 y_2}$.

Vediamo intanto quanto vale nel dettaglio la parte reale di α , in modo da capire perché si parla di “assenza di perdite”: dato che avevamo posto

$$\begin{aligned} z_1 &= (r_1 + j\omega\ell) \\ y_2 &= \frac{1}{z_2} = \frac{1}{(r_2 + j\omega c)} \end{aligned}$$

parlare di perdite nulle significa ritenere che i termini dissipativi, ossia r_1 e r_2 , siano del tutto trascurabili rispetto ai termini induttivi e capacitivi. In altre parole, parlare di “perdite nulle” equivale a supporre che

$$\begin{cases} r_1 \ll \omega\ell \\ g_2 \ll \omega c \end{cases}$$

Sotto queste ipotesi, risulta evidentemente

$$\begin{aligned} z_1 &= j\omega\ell \\ y_2 &= j\omega c \end{aligned}$$

e quindi abbiamo che

$$\gamma = \sqrt{z_1 y_2} = \sqrt{-\omega^2 \ell c} = j\omega\sqrt{\ell c}$$

da cui, come previsto, si deduce che la parte reale di γ è nulla, ossia $\alpha=0$.

Se $\alpha=0 \rightarrow \gamma=j\beta$ è un numero immaginario puro, per cui la funzione Cosh coincide con la funzione Cos, mentre la funzione Senh coincide con la funzione jSen; perciò, le espressioni di $V(z)$ e $I(z)$ si modificano nel modo seguente:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + jz_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = \frac{1}{z_c} [jV_0 \sin(\beta z) + z_c I_0 \cos(\beta z)] \end{cases}$$

In base a queste equazioni, note la tensione e la corrente in corrispondenza del carico e noti i parametri caratteristici della linea (cioè l'impedenza caratteristica e la costante di fase β), siamo in grado di conoscere la tensione e la corrente in corrispondenza di una qualsiasi sezione z della linea.

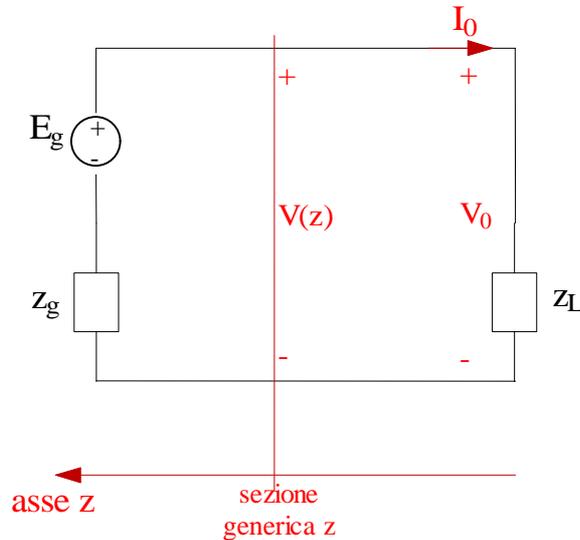
Le linee di trasmissione con basse perdite sono di speciale interesse per la trasmissione di energia alle *frequenze radio* ed alle *UHF* e questo per due motivi: in primo luogo, la caratteristica delle linee progettate per questo tipo di trasmissione è proprio quella di avere perdite molto basse; in secondo luogo, nei *circuiti a microonde*, queste linee vengono usate come degli elementi circuitali ed è perciò opportuno conoscerne il comportamento.

Prima di proseguire, riepiloghiamo le relazioni che si hanno nel caso di $\alpha=0$:

$$\begin{cases} z_1 = j\omega\ell \\ y_2 = j\omega c \\ z_c = \sqrt{\frac{\ell}{c}} \\ \gamma = j\beta \\ \beta = \omega\sqrt{\ell c} \end{cases}$$

IMPEDENZA DI INGRESSO

Cominciamo a visualizzare meglio il collegamento del carico con il generatore: sempre nell'ipotesi che il regime sia sinusoidale, possiamo visualizzare il tutto come un collegamento in serie tra un generatore di tensione alternata, dotato di impedenza interna z_g , ed una impedenza z_L che rappresenta il carico:



Come si evidenzia dallo schema, è chiaro che, se V_0 è la tensione ai capi del carico e I_0 la corrente che risulta attraversare il carico stesso, deve essere $z_L = \frac{V_0}{I_0}$. Considerate allora le equazioni

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cosh(\gamma z) + z_c I_0 \sinh(\gamma z) \\ I(z) = \frac{V_0}{z_c} \sinh(\gamma z) + I_0 \cosh(\gamma z) \end{cases}$$

si definisce “**impedenza di ingresso**” alla sezione z il rapporto tra la tensione e la corrente in corrispondenza della sezione stessa, ossia la quantità

$$z_i(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_0 \cosh(\gamma z) + z_c I_0 \sinh(\gamma z)}{\frac{V_0}{z_c} \sinh(\gamma z) + I_0 \cosh(\gamma z)}$$

In pratica, il significato della impedenza di ingresso è il seguente: per $z=0$ nel nostro riferimento, il carico “è visto dalla linea di trasmissione” semplicemente come z_L ; al contrario, quando ci portiamo a distanza z dal carico, vediamo, appunto come carico, non più solo z_L , ma l’insieme di z_L e del tratto di linea, di lunghezza z , che ancora ci separa da z_L ; di conseguenza, a distanza z da z_L , il carico è visto dalla linea come $z_i(z)$. E’ come se noi, a distanza z da z_L , tracciassimo una sezione ideale trasversale e considerassimo come carico tutto ciò che c’è a destra di tale sezione: tale carico è appunto l’impedenza di ingresso.

Se, adesso, nell’espressione prima ricavata per z_i , moltiplichiamo e dividiamo il denominatore per z_c , otteniamo

$$z_i(z) = z_c \frac{V_0 \cosh(\gamma z) + z_c I_0 \sinh(\gamma z)}{V_0 \sinh(\gamma z) + z_c I_0 \cosh(\gamma z)}$$

Dividendo ambo i membri per I_0 , si ottiene poi

$$z_i(z) = z_C \frac{\frac{V_0}{I_0} \cosh(\gamma z) + z_C \sinh(\gamma z)}{\frac{V_0}{I_0} \sinh(\gamma z) + z_C \cosh(\gamma z)}$$

Ma, avendo detto che $z_L = \frac{V_0}{I_0}$, concludiamo che

$$z_i(z) = z_C \frac{z_L \cosh(\gamma z) + z_C \sinh(\gamma z)}{z_L \sinh(\gamma z) + z_C \cosh(\gamma z)}$$

Caso particolare: perdite nulle

Vediamo adesso come cambia l'espressione dell'impedenza di ingresso alla sezione z nel caso in cui si ritengano trascurabili le perdite: abbiamo detto in precedenza che parlare di "assenza di perdite" equivale a supporre trascurabili i termini dissipativi sulla linea, ossia a supporre che

$$\begin{aligned} r_1 &\ll \omega \ell \\ g_2 &\ll \omega c \end{aligned}$$

Allora, dato che sussistono le relazioni

$$\begin{aligned} z_1 &= (r_1 + j\omega \ell) \\ y_2 &= \frac{1}{z_2} = \frac{1}{(r_2 + j\omega c)} \\ \gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{z_1 y_2} \\ \frac{\gamma}{z_1} &= \frac{1}{z_C} \end{aligned}$$

in assenza di perdite queste relazioni diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \longrightarrow \gamma = j\beta = j\omega \sqrt{\ell c} \\ z_1 = j\omega \ell \\ y_2 = j\omega c \\ z_C = \sqrt{\frac{\ell}{c}} \end{array} \right.$$

In particolare, ci interessa il fatto che la "costante di propagazione" $\gamma=j\beta$ diventa un numero immaginario puro: come visto in precedenza, ciò implica che l'andamento di tensione e corrente possa essere descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + jz_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = \frac{1}{z_c} [jV_0 \sinh(\beta z) + z_c I_0 \cos(\beta z)] \end{cases}$$

Queste due equazioni si possono porre in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta z) & jz_c \sin(\beta z) \\ j \frac{\sin(\beta z)}{z_c} & \cos(\beta z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

La matrice di questo sistema prende il nome di **"matrice ABCD"** e gode evidentemente della proprietà di avere determinante pari ad 1.

Vediamo adesso quanto vale l'impedenza di ingresso in base a quelle nuove relazioni: è facile verificare che essa vale

$$z_i(z) = z_c \frac{z_L \cos(\beta z) + jz_c \sin(\beta z)}{jz_L \sin(\beta z) + z_c \cos(\beta z)}$$

Osservazione: applicazione della matrice ABCD

L'espressione di V(z) e I(z) ottenuta mediante la matrice ABCD consente un calcolo immediato della tensione e della corrente a distanza z dal carico, note che siano la tensione e la corrente in corrispondenza del carico stesso. Per esempio, supponiamo che, in corrispondenza del carico, risulti $V_0 = 0$: in questo caso, ad una distanza z dal carico, avremo che

$$\begin{bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta z) & jz_c \sin(\beta z) \\ j \frac{\sin(\beta z)}{z_c} & \cos(\beta z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} V(z) = jz_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

In modo del tutto analogo, se fosse $I_0 = 0$, avremmo

$$\begin{bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta z) & jz_c \sin(\beta z) \\ j \frac{\sin(\beta z)}{z_c} & \cos(\beta z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) \\ I(z) = j \frac{\sin(\beta z)}{z_c} V_0 \sin(\beta z) \end{cases}$$

Valore esatto della costante di propagazione γ in assenza di perdite

Abbiamo in precedenza detto che, in assenza di perdite, possiamo ritenere nullo il valore della costante di attenuazione α (=parte reale di γ). In effetti, questo valore non risulta proprio nullo, per cui vogliamo adesso vedere approssimativamente quanto vale.

Intanto, la definizione di γ ci dice che $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{z_1 y_2}$. Sostituendo le espressioni dell'impedenza e dell'ammettenza sotto radice abbiamo

$$\gamma = \sqrt{(r_1 + j\omega \ell)(g_2 + j\omega c)}$$

Mettendo in evidenza nella prima parentesi il termine $j\omega\ell$ e nella seconda il termine $j\omega c$ abbiamo

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \ell c \left(\frac{r_1}{j\omega\ell} + 1 \right) \left(\frac{g_2}{j\omega c} + 1 \right)} = j\omega\sqrt{\ell c} \sqrt{\left(\frac{r_1}{j\omega\ell} + 1 \right) \left(\frac{g_2}{j\omega c} + 1 \right)}$$

Eseguendo adesso il prodotto sotto radice abbiamo

$$\gamma = j\omega\sqrt{\ell c} \sqrt{\left(\frac{r_1}{j\omega\ell} + \frac{g_2}{j\omega c} \right) + \left(\frac{r_1}{j\omega\ell} + \frac{g_2}{j\omega c} + 1 \right)}$$

Avendo detto che l'ipotesi di assenza di perdite equivale a

$$\begin{aligned} r_1 &\ll \omega\ell \\ g_2 &\ll \omega c \end{aligned}$$

possiamo trascurare il primo prodotto tra parentesi, scrivendo che

$$\gamma = j\omega\sqrt{\ell c} \sqrt{\frac{r_1}{j\omega\ell} + \frac{g_2}{j\omega c} + 1}$$

e possiamo sviluppare la seconda radice in serie: ciò che si ottiene è

$$\gamma = j\omega\sqrt{\ell c} \left(1 + \frac{r_1}{2j\omega\ell} \right) \left(1 + \frac{g_2}{2j\omega c} \right)$$

In questa relazione possiamo separare la parte immaginaria da quella reale: otteniamo

$$\gamma = \sqrt{\ell c} \left(\frac{r_1}{2\ell} + \frac{g_2}{2c} \right) + j\omega\sqrt{\ell c}$$

da cui si deduce che la parte immaginaria è

$$\beta = j\omega\sqrt{\ell c}$$

come avevamo trovato prima, mentre la parte reale è

$$\alpha = \sqrt{\ell c} \left(\frac{r_1}{2\ell} + \frac{g_2}{2c} \right)$$

ed è diversa da zero (anche se di valore estremamente basso). Ricordandoci della definizione di impedenza caratteristica, ossia $z_c = z_1/\gamma$, abbiamo anche che

$$\alpha = \frac{r_1}{2z_c} + \frac{g_2 z_c}{2}$$

CASO PARTICOLARE: CONDIZIONE DI HEAVYSIDE

Sulla base delle relazioni trovate nel paragrafo precedente, esaminiamo alcuni casi particolari che si possono incontrare relativamente al valore dei parametri della linea.

Il primo di questi è la cosiddetta "**condizione di Heavyside**", che si ha per definizione quando

$$\frac{r_1}{\ell} = \frac{g_2}{c}$$

La particolarità di questa condizione si manifesta nel valore dell'impedenza caratteristica della linea z_c : abbiamo infatti che

$$z_c = \frac{z_1}{\gamma} = \frac{r_1 + j\omega\ell}{\sqrt{(r_1 + j\omega\ell)(g_2 + j\omega c)}} = \sqrt{\frac{r_1 + j\omega\ell}{g_2 + j\omega c}} = \sqrt{\frac{\ell}{c} \frac{\frac{r_1}{\ell} + j\omega}{\frac{g_2}{c} + j\omega}}$$

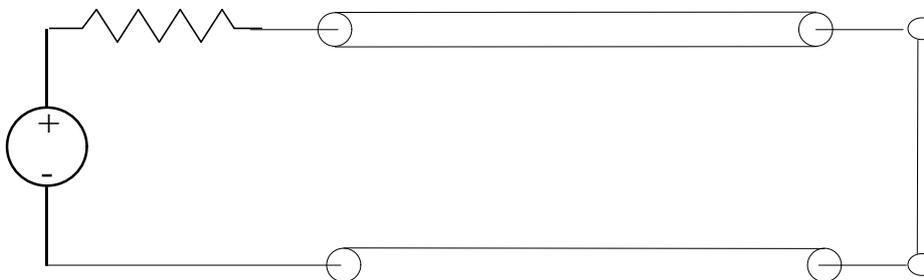
Avendo detto che $\frac{r_1}{\ell} = \frac{g_2}{c}$, è evidente che $z_c = \sqrt{\frac{\ell}{c}} = R_c$: il rapporto tra una induttanza ed una capacità ha le dimensioni di una resistenza (da cui si spiega il simbolo R_c usato nella formula), per cui quello che abbiamo trovato è che, *nonostante z_1 e z_2 siano delle quantità complesse, in condizioni di Heavyside l'impedenza caratteristica della linea di trasmissione risulta essere puramente resistiva.*

Se andiamo a valutare, inoltre, il valore della costante di attenuazione α (= parte reale della costante di propagazione γ), troviamo subito che

$$\alpha = \sqrt{\ell c} \left(\frac{r_1}{2\ell} + \frac{g_2}{2c} \right) = \sqrt{\ell c} \frac{r_1}{\ell} = \frac{r_1 \sqrt{c}}{\sqrt{\ell}} = r_1 \sqrt{\frac{c}{\ell}} = \frac{r_1}{R_c}$$

CASO PARTICOLARE: CARICO COSTITUITO DA CORTOCIRCUITO

Un altro caso particolare è quello in cui il carico alimentato dal generatore è costituito da un **cortocircuito**, il che equivale a $z_L=0$:



Se andiamo a valutare l'impedenza di ingresso, alla generica sezione z , usando la relazione

$$z_i = z_c \frac{z_L \cosh(\gamma z) + z_c \sinh(\gamma z)}{z_L \sinh(\gamma z) + z_c \cosh(\gamma z)}$$

relativa alla presenza di perdite sulla linea, troviamo che

$$z_i = z_c \frac{z_c \sinh(\gamma z)}{z_c \cosh(\gamma z)} = z_c \operatorname{tgh}(\gamma z)$$

Se, invece, supponiamo non ci siano perdite sulla linea, la formula da usare è

$$z_i = z_c \frac{z_L \cos(\beta z) + j z_c \sin(\beta z)}{j z_L \sinh(\beta z) + z_c \cos(\beta z)}$$

e quindi si trova, per $z_L=0$, che

$$z_i = z_c \frac{j z_c \sin(\beta z)}{z_c \cos(\beta z)} = j z_c \operatorname{tg}(\beta z)$$

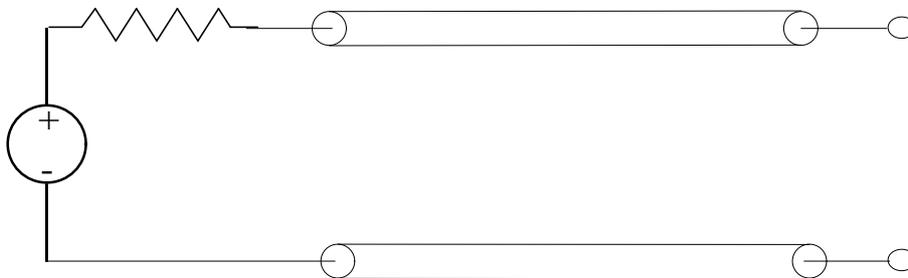
Questa relazione ha una importanza notevole in diverse applicazioni (corso di *Antenne*).

Ancora, se, oltre alla assenza di perdite, ci mettiamo anche nella condizione di Heavyside, sappiamo che $z_c=R_c$, per cui abbiamo che l'impedenza di ingresso vale

$$z_i = j R_c \operatorname{tg}(\beta z)$$

CASO PARTICOLARE: CARICO COSTITUITO DA UN CIRCUITO APERTO

L'altro caso particolare riguardante il carico è quello in cui esso è un **circuito aperto**, il che equivale a $z_L=\infty$:



Usando sempre la relazione generale

$$z_i = z_c \frac{z_L \cosh(\gamma z) + z_c \sinh(\gamma z)}{z_L \sinh(\gamma z) + z_c \cosh(\gamma z)}$$

possiamo mettere in evidenza z_L in entrambi i membri, ottenendo

$$z_i = z_c \frac{z_L \left(\cosh(\gamma z) + \frac{z_c}{z_L} \sinh(\gamma z) \right)}{z_L \left(\sinh(\gamma z) + \frac{z_c}{z_L} \cosh(\gamma z) \right)}$$

da cui si ricava, se $z_L = \infty$, che

$$z_i = z_C \frac{\cosh(\gamma z)}{\sinh(\gamma z)} = z_C \operatorname{ctgh}(\gamma z)$$

Se, invece, supponiamo non ci siano perdite sulla linea, per cui usiamo la relazione

$$z_i = z_C \frac{z_L \cos(\beta z) + j z_C \sin(\beta z)}{j z_L \sinh(\beta z) + z_C \cos(\beta z)}$$

troviamo, con metodo analogo a prima, che

$$z_i = z_C \frac{z_C \cos(\beta z)}{j z_C \sin(\beta z)} = \frac{z_C}{j} \operatorname{ctg}(\beta z)$$

Infine, se, oltre alla assenza di perdite, ci mettiamo nella condizione di Heavyside, sappiamo che $z_C = R_C$, per cui abbiamo che l'impedenza di ingresso vale

$$z_i = \frac{R_C}{j} \operatorname{ctg}(\beta z)$$

Riepiloghiamo nello schema seguente i risultati ottenuti negli ultimi due paragrafi a proposito dell'impedenza di ingresso:

$$\begin{array}{l}
 z_L = 0 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{presenza di perdite} \longrightarrow z_i = z_C \operatorname{tgh}(\gamma z) \\ \text{assenza di perdite} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_i = j z_C \operatorname{tg}(\beta z) \\ \text{cond. Heavyside} \longrightarrow z_i = j R_C \operatorname{tg}(\beta z) \end{array} \right. \end{array} \right. \\
 \\
 z_L = \infty \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{presenza di perdite} \longrightarrow z_i = z_C \operatorname{ctgh}(\gamma z) \\ \text{assenza di perdite} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_i = \frac{z_C}{j} \operatorname{ctg}(\beta z) \\ \text{cond. Heavyside} \longrightarrow z_i = \frac{R_C}{j} \operatorname{ctg}(\beta z) \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{array}$$

N.B. Si osserva che facendo il prodotto tra i valori di impedenza di ingresso ottenuti, in condizione di Heavyside ed in assenza di perdite, per il cortocircuito e per il circuito aperto, si ottiene esattamente R_C^2

DIAGRAMMI DELLA TENSIONE E DELLA CORRENTE IN ASSENZA DI PERDITE

Vogliamo adesso studiare l'andamento della tensione e della corrente lungo la linea di trasmissione al variare del carico, rappresentato sempre dalla generica impedenza z_L . Le espressioni di $V(z)$ e $I(z)$ cui dobbiamo fare riferimento sono le seguenti:

$$\text{in presenza di perdite sulla linea} \rightarrow \begin{cases} V(z) = V_0 \cosh(\gamma z) + z_C I_0 \sinh(\gamma z) \\ I(z) = \frac{V_0}{z_C} \sinh(\gamma z) + I_0 \cosh(\gamma z) \end{cases}$$

$$\text{in assenza di perdite sulla linea} \rightarrow \begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + j z_C I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{z_C} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

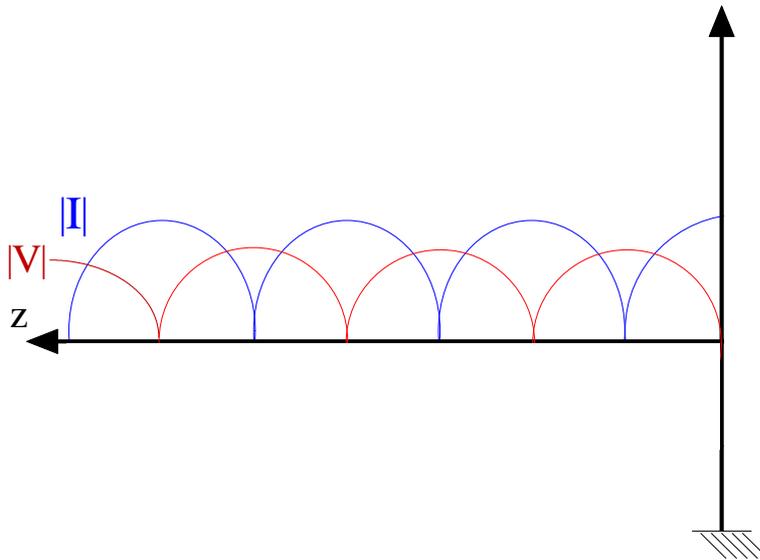
In particolare, ci riferiremo al caso di assenza di perdite sulla linea.

1° caso: carico costituito da un cortocircuito

Cominciamo dal caso in cui $z_L = 0$: ricordando che, in corrispondenza del carico, risulta $V_0 = z_L I_0$, la condizione $z_L = 0$ equivale a $V_0 = 0$, per cui abbiamo che

$$\begin{cases} V(z) = j z_C I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = I_0 \cos(\beta z) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |V(z)| = |j z_C I_0 \sin(\beta z)| = |j z_C| |I_0 \sin(\beta z)| = |z_C| |I_0 \sin(\beta z)| \\ |I(z)| = |I_0 \cos(\beta z)| = I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

Possiamo dunque tracciare i diagrammi (in funzione ovviamente di z) del modulo della tensione e di quello della corrente:



N.B. Ricordiamo di non far caso al fatto per cui il modulo della corrente abbia valore massimo maggiore di quello della tensione, in quanto i diagrammi sono solo qualitativi.

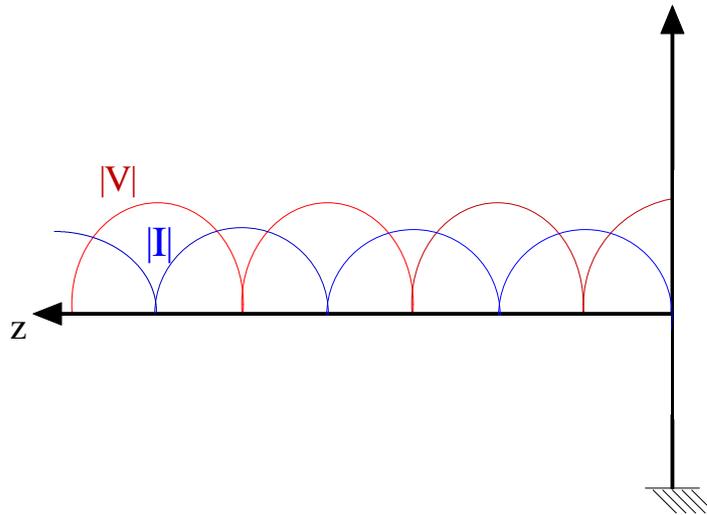
La cosa principale che si evidenzia dal diagramma è che, nel caso del carico in cortocircuito, i valori massimi della corrente si hanno in corrispondenza dei valori minimi della tensione e viceversa. Ciò è confermato dai valori di V e I che si hanno in corrispondenza proprio del carico: trattandosi di un cortocircuito, è chiaro che la tensione assume valore minimo, ossia $|V_0| = 0$, mentre la corrente, non trovando resistenze di nessun tipo, assume il suo valore massimo $|I_{\text{MAX}}| = |I_0|$.

2° caso: carico costituito da un circuito aperto

In questo caso, essendo $z_L = \infty$, abbiamo che $I_0 = 0$, per cui, analiticamente, la situazione è

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{z_c} \sin(\beta z) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |V(z)| = V_0 \cos(\beta z) \\ |I(z)| = \left| j \frac{V_0}{z_c} \sin(\beta z) \right| = \left| \frac{j}{z_c} \right| V_0 \sin(\beta z) = \left| \frac{1}{z_c} \right| V_0 \sin(\beta z) \end{cases}$$

per cui i diagrammi risultano semplicemente invertiti rispetto al caso precedente:



Si ha dunque che, in corrispondenza del carico, la tensione assume valore massimo $|V_{MAX}| = |V_0|$, mentre la corrente, trovando una resistenza infinita, assume il valore minimo $|I_0| = 0$.

3° caso: carico adattato

Un caso di particolare importanza è quello cosiddetto di **carico adattato**, che si ha quando il valore della impedenza che rappresenta il carico è reale e precisamente vale

$$z_L = R_C = \sqrt{\frac{\ell}{c}}$$

dove R_C è il valore dell'impedenza caratteristica della linea in condizioni di Heavyside, ossia quando le perdite sulla linea sono supposte nulle e quando si ha che $\frac{r_1}{\ell} = \frac{g_2}{c}$.

Consideriamo sempre l'equazione delle linee di trasmissione per perdite nulle:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + j z_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{z_c} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

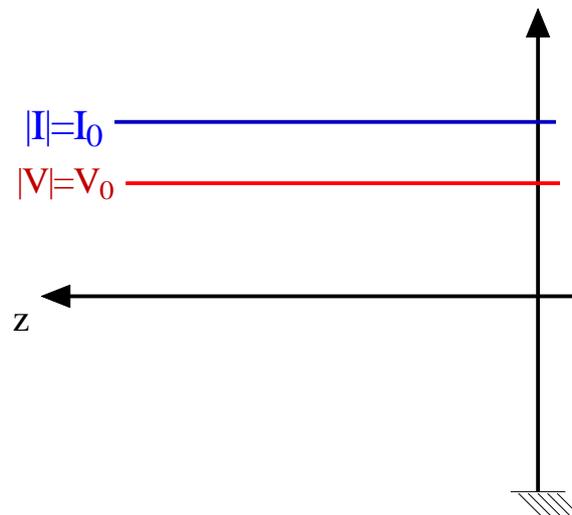
Avendo supposto che $z_L = z_C = R_C$ ed essendo $V_0 = z_L I_0$, le equazioni diventano

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + jV_0 \sin(\beta z) = V_0 (\cos(\beta z) + j \sin(\beta z)) \\ I(z) = jI_0 \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) = I_0 (\cos(\beta z) + j \sin(\beta z)) \end{cases}$$

Possiamo adesso esprimere in modo più comodo queste due equazioni sfruttando le formule di Eulero: è infatti immediato verificare che esse sono equivalenti a

$$\begin{cases} V(z) = V_0 e^{j\beta z} \\ I(z) = I_0 e^{j\beta z} \end{cases}$$

Ciò che si deduce da queste formule è che manca, sia nell'onda di tensione sia in quella di corrente, l'onda riflessa (come d'altra parte era logico aspettarsi, visto che sono state supposte nulle le perdite e tali perdite sono dovute proprio all'onda riflessa). Abbiamo cioè un'onda puramente progressiva di tensione e un'onda puramente progressiva di corrente: ciò significa che il modulo dell'onda risulta costante man mano che ci si sposta spazialmente, per cui i diagrammi dei moduli di $V(z)$ e $I(z)$ diventano semplicemente i seguenti:



La differenza nei valori di tensione e di corrente, man mano che ci spostiamo lungo la linea, è solo nella fase: ad esempio, avendo detto che $V(z) = V_0 e^{j\beta z}$, la tensione nella generica sezione z_1 risulta essere $V(z_1) = V_0 e^{j\beta z_1}$ (cioè con modulo V_0 e fase βz_1), mentre quella nella generica sezione $z_2 \neq z_1$ risulta essere $V(z_2) = V_0 e^{j\beta z_2}$ (cioè con modulo V_0 e fase βz_2).

Quella appena descritta è appunto la condizione di **adattamento del carico**. In tale condizione, tutta la potenza fornita dal generatore viene trasferita al carico senza alcuna perdita⁸: i valori numerici sono chiaramente

$$\begin{aligned} |V_{\text{MAX}}| &= |V_0| = |R_C I_0| \\ |I_{\text{MAX}}| &= |I_0| \end{aligned}$$

(torneremo comunque in seguito e con maggiore precisione sulla condizione di adattamento del carico).

⁸dato che stiamo supponendo che la linea non abbia perdite.

VALUTAZIONE ANALITICA DEI DIAGRAMMI

Vediamo adesso di fare considerazioni matematiche che ci diano gli stessi risultati che fino ad ora abbiamo dato per via qualitativa. Consideriamo sempre le equazioni delle linee di trasmissione in assenza di perdite:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + jz_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{z_c} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

Supponiamo anche di essere in condizioni di Heavyside, per cui $z_c = R_c = \sqrt{\frac{\ell}{c}}$: le equazioni diventano

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + jR_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{R_c} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

Adesso, se supponiamo che il carico sia puramente resistivo, possiamo porre $z_L = R$. Allora, essendo $V_0 = z_L I_0 = R I_0$, possiamo ulteriormente modificare le equazioni, ottenendo

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + jR_c \frac{V_0}{R} \sin(\beta z) \\ I(z) = jR \frac{I_0}{R_c} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

Andiamo allora a calcolarci i moduli di $V(z)$ e $I(z)$ sfruttando queste relazioni: intanto, applicando semplicemente l'operatore "modulo", possiamo riscrivere

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_0| \left| \cos(\beta z) + j \frac{R_c}{R} \sin(\beta z) \right| \\ |I(z)| = |I_0| \left| j \frac{R}{R_c} \sin(\beta z) + \cos(\beta z) \right| \end{cases}$$

In ciascuna equazione abbiamo a secondo membro il prodotto tra il modulo di una costante, cioè rispettivamente V_0 e I_0 , ed il modulo di un numero complesso: applicando allora la definizione di modulo di un numero complesso, abbiamo che

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_0| \sqrt{(\cos(\beta z))^2 + \left(\frac{R_c}{R} \sin(\beta z)\right)^2} \\ |I(z)| = |I_0| \sqrt{(\cos(\beta z))^2 + \left(\frac{R}{R_c} \sin(\beta z)\right)^2} \end{cases}$$

E' chiaro che tutto dipende, in entrambe le equazioni, dal termine sotto radice, visto che è l'unico che dipende a sua volta dalla coordinata z .

Il primo caso che consideriamo è quello in cui $R \ll R_C$: in questa situazione, il valore della frazione R_C/R è molto elevato, mentre quello della frazione R/R_C è molto piccolo; allora, nella prima equazione possiamo trascurare il coseno e nella seconda possiamo trascurare il seno, in modo da ottenere

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_0| \frac{R_C}{R} \text{sen}(\beta z) \\ |I(z)| = |I_0| \cos(\beta z) \end{cases}$$

Consideriamo in particolare il modulo della tensione: il suo valore massimo è $V_{\text{MAX}} = V_0 \frac{R_C}{R}$ e si ottiene quando il seno vale 1, ossia quando l'argomento βz del seno è un multiplo intero dispari $\pi/2$: in termini analitici, deve accadere dunque che

$$\beta z = (2m+1) \frac{\pi}{2}$$

ossia che

$$z = (2m+1) \frac{\pi}{2\beta}$$

Se indichiamo con λ la lunghezza d'onda dell'onda di tensione, essa è legata alla costante di fase β (= coefficiente della parte immaginaria della costante di propagazione γ) dalla relazione $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$: sostituendo questa espressione di β nell'espressione di z prima trovato si ottiene che

$$z_{\text{MAX}} = (2m+1) \frac{\lambda}{4}$$

Quindi, in corrispondenza di questi valori della coordinata z , noi otteniamo i valori massimi del modulo della tensione. Vediamo allora quali sono i valori del modulo della corrente in corrispondenza di questi z_{MAX} : l'espressione del modulo della corrente era

$$|I(z)| = |I_0| \cos(\beta z)$$

ed è subito chiaro che $|I(z)|$ si annulla in quegli stessi punti dove $|V(z)|$ è massimo: infatti, nei punti in cui il Seno vale 1, il coseno vale 0.

Abbiamo dunque trovato una conferma matematica del fatto che *quando il carico ha un valore piccolo (rispetto all'impedenza caratteristica della linea), i valori massimi della tensione si ottengono in corrispondenza dei valori minimi della corrente.*

Adesso vediamo quando si ottengono i valori minimi della tensione: dato che

$$|V(z)| = |V_0| \frac{R_C}{R} \text{sen}(\beta z)$$

è chiaro che $|V(z)|$ è minimo, ossia vale 0, quando vale 0 il seno, ossia quando $\beta z = n\pi$, ossia quando $z = n \frac{\pi}{\beta}$, ossia infine quando

$$z_{\text{MIN}} = \frac{n}{2} \lambda$$

Con considerazioni analoghe a prima, è chiaro che, in corrispondenza di questi stessi valori di z , si ottengono i valori massimi della corrente, ossia

$$I_{\text{MAX}} = I_0$$

Anche questa è una conferma analitica della considerazioni qualitative fatte prima.

Passiamo al caso in cui $R \gg R_C$: questa volta, il valore della frazione R_C/R è molto piccolo, mentre quello della frazione R/R_C è molto grande; allora, nella espressione di $|V(z)|$ possiamo trascurare il seno e nella espressione di $|I(z)|$ possiamo trascurare il coseno, in modo da ottenere

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_0| \cos(\beta z) \\ |I(z)| = |I_0| \frac{R}{R_C} \text{sen}(\beta z) \end{cases}$$

E' abbastanza facile intuire come il discorso vada semplicemente invertito rispetto al caso precedente: il valore massimo del modulo della corrente, ossia $I_{\text{MAX}} = I_0 \frac{R}{R_C}$, si ottiene per

$$z_{\text{MAX}} = \frac{m}{2} \lambda$$

ed in corrispondenza del valore minimo ($=0$) della tensione. Viceversa, il valore minimo ($=0$) della corrente si ottiene per

$$z_{\text{MIN}} = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$$

ed in corrispondenza del valore massimo della tensione, che vale $V_{\text{MAX}} = V_0$.

Per concludere, si nota che, nel caso in cui $R \gg R_C$, il valore massimo di tensione ed il valore minimo di corrente si ottengono proprio in corrispondenza del carico: infatti, le relazioni da considerare sono

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_0| \cos(\beta z) \\ |I(z)| = |I_0| \frac{R}{R_C} \text{sen}(\beta z) \end{cases}$$

e i valori rispettivamente massimo e minimo si ottengono per $z=0$.

Rapporto d'onda stazionario

Una delle quantità misurabili (molto importante) sulle linee di trasmissione è il cosiddetto **rapporto d'onda stazionario**, definito come il rapporto tra il valore massimo ed il valore minimo del modulo della tensione o della corrente: si ha cioè che

$$\boxed{\text{ROS} = \frac{|V(z)|_{\text{MAX}}}{|V(z)|_{\text{MIN}}} = \frac{|I(z)|_{\text{MAX}}}{|I(z)|_{\text{MIN}}}}$$

In base a quanto visto poco fa, abbiamo due possibilità a seconda del valore del carico:

$$\text{se } R \ll R_C \rightarrow \begin{cases} V_{\text{MAX}} = V_0 \frac{R_C}{R} \\ V_{\text{MIN}} = V_0 \end{cases} \longrightarrow \text{ROS} = \frac{R_C}{R}$$

$$\text{se } R \gg R_C \rightarrow \begin{cases} I_{\text{MAX}} = I_0 \frac{R}{R_C} \\ I_{\text{MIN}} = I_0 \end{cases} \longrightarrow \text{ROS} = \frac{R}{R_C}$$

In ogni caso, si ha che $\text{ROS} \gg 1$.

Inoltre, è chiaro che, in base a quelle due relazioni, se noi riusciamo a misurare la tensione o la corrente lungo la linea, per cui possiamo conoscere il valore del ROS, e conosciamo inoltre il valore di R_C , siamo in grado di valutare il valore della resistenza di carico R .

DIAGRAMMI DELL'IMPEDENZA DI INGRESSO

Le linee di trasmissione sono state fino ad ora esaminate essenzialmente come mezzo di trasporto di energia da un punto ad un altro, tipicamente da un apparato di generazione ad un carico. Tuttavia, *nel campo delle microonde, esse sono molto importanti anche come veri e propri elementi circuitali*. Il motivo è il seguente: quando si costruiscono dei dispositivi che lavorino con frequenze superiori ai 150 MHz, è difficile realizzare normali elementi circuitali (resistori, induttori, generatori e così via) che si possano ancora considerare a parametri concentrati, per cui risulta necessario adottare l'ipotesi dei parametri distribuiti e quindi considerare anche la presenza delle linee di trasmissione; per considerare tali linee, dato che le dimensioni fisiche delle sezioni di linea sono sufficientemente piccole, è possibile vederle proprio come degli elementi circuitali. Da qui viene la necessità di studiare il comportamento circuitale di queste linee per valori di lunghezza confrontabili con la lunghezza d'onda delle onde che devono trasportare.

Il punto di partenza è ancora una volta costituito dalle equazioni delle linee di trasmissione in assenza di perdite:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + j z_C I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{z_C} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

In precedenza, abbiamo già esaminato cosa accade alla impedenza di ingresso $z_i(z) = \frac{V(z)}{I(z)}$, in corrispondenza di una generica distanza z dal carico, quando il carico stesso z_L è costituito da un cortocircuito o da un circuito aperto: in particolare, abbiamo trovato che

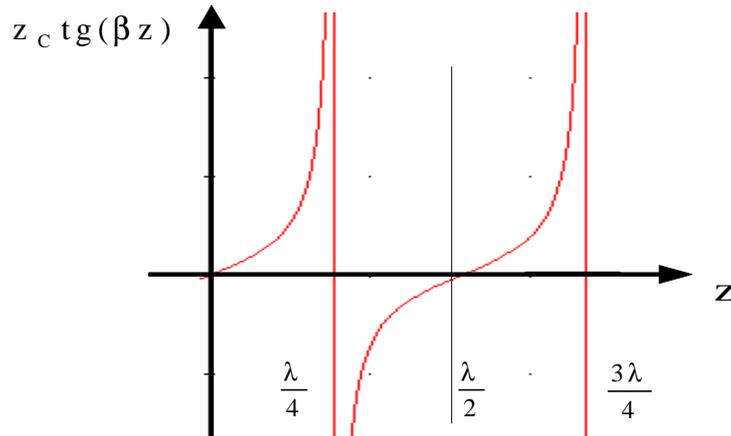
$$\text{se } z_L=0 \text{ (cortocircuito)} \rightarrow z_i = j z_C \text{tg}(\beta z)$$

$$\text{se } z_L=\infty \text{ (circuito aperto)} \rightarrow z_i = -j z_C \text{ctg}(\beta z)$$

Allora, è chiaro che z_i non risulta mai resistiva (in quanto manca comunque della parte reale) e può risultare induttiva o capacitiva a seconda del segno del coefficiente della parte immaginaria (risulta induttiva se il segno è positivo, mentre risulta capacitiva in caso contrario).

Possiamo perciò provare a diagrammare i valori del coefficiente della parte immaginaria di z_i , nei due casi, in funzione di z , proprio allo scopo di vedere che carattere ha l'impedenza di ingresso al variare della distanza z cui ci poniamo dal carico.

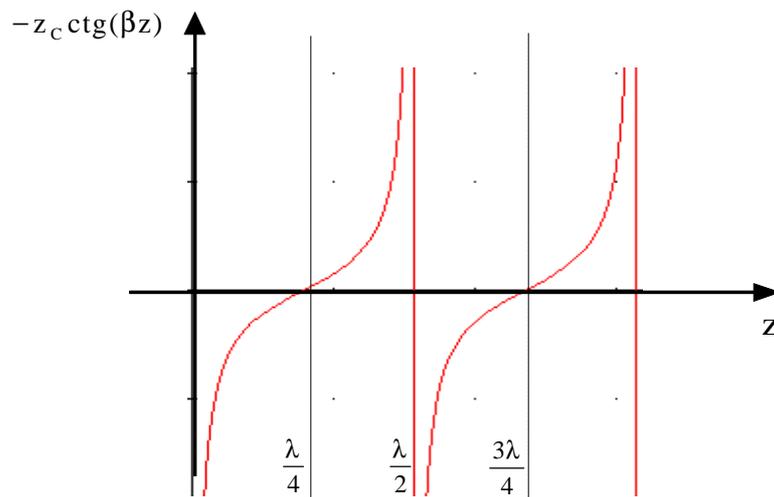
Come primo diagramma riportiamo il coefficiente della parte immaginaria della relazione $z_i = jz_c \operatorname{tg}(\beta z)$, ossia l'andamento della **reattanza di ingresso** (=coefficiente della parte immaginaria della impedenza di ingresso) quando il carico è un semplice cortocircuito: si ottiene



Questo grafico mostra quanto segue:

- quando siamo a distanza $z < \lambda/4$, la reattanza di ingresso è positiva, ossia è di natura induttiva;
- quando siamo a distanza $\lambda/4 < z < \lambda/2$, la reattanza di ingresso è negativa, ossia di natura capacitiva;
- quando siamo a distanza $z = \lambda/2$, la reattanza di ingresso è nulla, il che significa che la linea di lunghezza $\lambda/2$ si comporta come un cortocircuito;
- a partire da $\lambda/2$ il discorso si ripete ogni tratto di lunghezza $\lambda/2$;
- infine, la reattanza di ingresso va all'infinito a distanza $\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots, \frac{(2k+1)\lambda}{4}$

Nel secondo grafico riportiamo adesso l'andamento di $-z_c \operatorname{ctg}(\beta z)$ in funzione del valore di z :



In questo caso, si osserva quanto segue:

- a distanza $z < \lambda/4$, la reattanza di ingresso è negativa, ossia è di natura capacitiva;
- a distanza $z = \lambda/4$, la reattanza di ingresso si annulla;
- a distanza $\lambda/4 < z < \lambda/2$, la reattanza di ingresso è positiva, cioè induttiva;
- a distanza $z = \lambda/2$, la reattanza di ingresso va all'infinito e lo fa in tutte le distanze multiple intere di $\lambda/2$;
- a partire da $\lambda/2$ il discorso si ripete ogni tratto di lunghezza $\lambda/2$.

In generale, quindi, se esaminiamo l'andamento complessivo (periodico) di questi diagrammi della reattanza di ingresso, possiamo affermare che, a seconda della distanza z dal carico (che è un corto oppure un circuito aperto) alla quale ci poniamo, possiamo vedere (guardando verso il carico) una induttanza oppure una capacità. Ecco, allora, che *una linea di trasmissione, "chiusa" su un cortocircuito o su un circuito aperto, può essere usata come un induttore o un condensatore a seconda della lunghezza della linea stessa.*

Particolare attenzione bisogna fare quando abbiamo un valore infinito (sia positivo sia negativo) della reattanza di ingresso: in base ai diagrammi appena visti, abbiamo, per esempio, valore ∞ quando la linea in cortocircuito è lunga $\lambda/4$ oppure quando la linea aperta in corto è lunga $\lambda/2$. In questi casi è necessario prendere in considerazione la parte resistiva dell'impedenza, che solo in teoria risulta nulla, mentre nella pratica ha un valore non nullo. Questo corrisponde alla condizione di un circuito a parametri concentrati che si trovi in condizioni di **risonanza parallelo**, il quale, per basse frequenze, presenta infatti una impedenza infinita se si trascura la resistenza.

Nei casi concreti, dunque, la parte resistiva dell'impedenza di ingresso non può essere trascurata: si può dimostrare che essa vale

$$R = \frac{2z_c^2}{r_1 L}$$

dove r_1 è la resistenza serie per unità di lunghezza della linea, z_c è l'impedenza di ingresso della linea ed L la lunghezza della linea stessa, che, come visto prima, deve essere un multiplo dispari di $\lambda/4$ se la linea è in corto o un multiplo pari di $\lambda/4$ se la linea è aperta.

Concludiamo osservando che l'espressione di R appena fornita risulta valida solo sotto 2 ipotesi fondamentali:

- la prima è che valgano le relazioni

$$\begin{aligned} \cosh(\alpha L) &\cong 1 \\ \sinh(\alpha L) &\cong \alpha L \end{aligned}$$

che significano che la quantità αL deve essere piuttosto piccola;

- la seconda è che si possa trascurare il valore di g_2 , il che consente di scrivere che

$$\alpha = \frac{r_1}{2z_c}$$

LINEA DI LUNGHEZZA $\lambda/4$ COME INVERTITORE DI IMPEDENZA

Consideriamo ancora una volta le equazioni delle linee di trasmissione ottenute prendendo come riferimento per l'asse z il punto in cui c'è il carico e nell'ipotesi di assenza di perdite:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + jz_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = I_0 \cos(\beta z) + j\frac{V_0}{z_c} \sin(\beta z) \end{cases}$$

Ricordiamo che V_0 ed I_0 sono i valori della tensione e della corrente relativi al carico e che z_c è l'impedenza caratteristica della linea, definita come $z_c = \frac{z_1}{\gamma}$. Abbiamo già definito l'impedenza di ingresso alla sezione z come il rapporto, fissato un certo valore della distanza z dal carico, tra la tensione e la corrente sulla linea:

$$z_i = \frac{V(z)}{I(z)} = z_c \frac{z_L \cos(\beta z) + jz_c \sin(\beta z)}{z_c \cos(\beta z) + jz_L \sin(\beta z)}$$

Questa può anche essere riscritta ponendo in evidenza, al posto dell'impedenza caratteristica della linea z_c , l'impedenza z_L che rappresenta il carico:

$$z_i = \frac{z_L \cos(\beta z) + jz_c \sin(\beta z)}{\cos(\beta z) + j\frac{z_L}{z_c} \sin(\beta z)} = z_L \frac{\cos(\beta z) + j\frac{z_c}{z_L} \sin(\beta z)}{\cos(\beta z) + j\frac{z_L}{z_c} \sin(\beta z)}$$

Vediamo allora quanto vale questa impedenza di ingresso se la calcoliamo a distanza $z=\lambda/4$ dal carico, dove λ è la lunghezza d'onda del segnale che si propaga lungo la linea: sostituendo questa espressione di z otteniamo

$$z_i = z_L \frac{\cos\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right) + j\frac{z_c}{z_L} \sin\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right)}{\cos\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right) + j\frac{z_L}{z_c} \sin\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right)}$$

La costante di fase β (=coefficiente della parte immaginaria della costante di propagazione γ) è legata alla lunghezza d'onda del segnale dalla relazione $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, dalla quale si ricava che $\beta\lambda = 2\pi$ ed anche, quindi, che

$$\beta \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Andando dunque a sostituire nella espressione dell'impedenza di ingresso, è chiaro che, in $\pi/2$, il coseno di annulla mentre il seno vale 1, per cui abbiamo che

$$z_i \left(z = \frac{\lambda}{4} \right) = z_L \frac{j \frac{z_C}{z_L}}{j \frac{z_L}{z_C}} = \frac{z_C^2}{z_L}$$

Abbiamo dunque trovato che *ad una distanza di $\lambda/4$ dal carico, l'impedenza di ingresso è pari al rapporto tra il quadrato dell'impedenza caratteristica e l'impedenza del carico.*

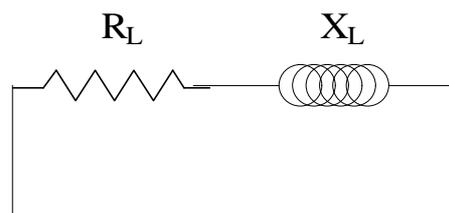
Nell'ipotesi ulteriore per cui sia

$$\begin{cases} z_C = R_C \\ z_L = R_L + jX_L \end{cases}$$

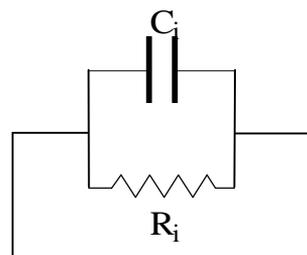
abbiamo evidentemente che

$$z_i \left(z = \frac{\lambda}{4} \right) = \frac{R_C^2}{R_L + jX_L} = \frac{1}{\frac{R_L}{R_C^2} + j \frac{X_L}{R_C^2}}$$

Questa relazione significa quanto segue: quando $z=0$, il carico è rappresentato semplicemente da $z_L=R_L+jX_L$ e può quindi essere schematizzato come



Al contrario, a distanza $z=\lambda/4$, il carico, rappresentato adesso non più da z_L ma dall'impedenza di ingresso z_i (la quale tiene conto, oltre che del carico vero e proprio z_L , anche del tratto di linea di lunghezza $\lambda/4$), è costituito da



ossia da un parallelo tra una capacità $X_i = -\frac{R_C^2}{X_L}$ ed una resistenza $R_i = \frac{R_C^2}{R_L}$. Da qui deriva il termine "invertitore di impedenza" attribuito al tratto di linea di linea lungo $\lambda/4$: mentre il carico Z_L è di natura ohmico-induttiva (serie), il carico visto da una distanza $L=\lambda/4$ diventa ohmico-capacitivo (parallelo).

Osservazione

Consideriamo sempre l'espressione dell'impedenza di ingresso, vista in corrispondenza della generica sezione z , per una linea priva di perdite:

$$z_i(z) = \frac{z_L \cos(\beta z) + j z_C \sin(\beta z)}{\cos(\beta z) + j \frac{z_L}{z_C} \sin(\beta z)}$$

Ricordando che $\beta=2\pi/\lambda$, ci si rende conto facilmente che $z_i(z)$ è costante e pari all'impedenza di carico Z_L se consideriamo una sezione di linea a distanza dal carico multipla di $\lambda/2$: infatti, prendendo $z=n\lambda/2$, risulta $\beta z=n\pi$, per cui i termini Coseno risultano pari a ± 1 mentre in termini Seno si annullano.

In modo del tutto analogo, se valutiamo l'impedenza di ingresso in corrispondenza di una arbitraria sezione z_1 e poi ripetiamo il calcolo per una sezione z_2 che si trovi ad una distanza da z_1 pari ad un multiplo di $\lambda/2$, otteniamo ancora la stessa impedenza. Anche qui il motivo è nell'espressione $\beta=2\pi/\lambda$.

Questa proprietà ha come conseguenza evidente il fatto che, data una linea di assegnata lunghezza, essa mantiene la stessa impedenza di ingresso, in qualsiasi sezione, anche se le aggiungiamo o sottraiamo tratti di linea, purché lunghi un multiplo di $\lambda/2$.

COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE SUL CARICO

Spesso sorge il problema di collegare due o più linee di trasmissione in cascata: l'effetto di questo collegamento è quello di introdurre una **discontinuità** tra due linee uniformi. In base alle *leggi di Kirchoff*, però, la tensione e la corrente totale devono rimanere continue attraverso la discontinuità. Abbiamo anche visto che la tensione totale di una linea si può considerare come la somma di un'onda diretta che viaggia nel verso positivo del riferimento prescelto e di un'onda riflessa che viaggia nel verso negativo. Supponiamo allora che l'onda diretta valga V_i nel punto di discontinuità e che quella riflessa valga invece V_r . Vediamo, sulla base di questo, come possiamo modificare l'equazione delle linee di trasmissione.

Consideriamo il caso generico della presenza di perdite e prendiamo come riferimento dell'asse z il punto in cui si trova il carico: sappiamo che, sotto queste ipotesi, l'andamento della tensione e della corrente lungo z è definito dalle relazioni

$$\begin{cases} V(z) = V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z} \\ I(z) = \frac{V_i}{z_C} e^{\gamma z} - \frac{V_r}{z_C} e^{-\gamma z} \end{cases}$$

dove ricordiamo ancora una volta che $\gamma = \alpha + j\beta$ è la costante di propagazione e z_C l'impedenza caratteristica della linea considerata.

Per determinare le costanti (in generale complesse) V_i e V_r , sappiamo di dover imporre le condizioni al contorno relative ad una qualsiasi sezione della linea; la scelta più semplice è quella di considerare la sezione di carico, ossia $z=0$: le condizioni al contorno sul carico sono i valori di tensione $V(0)=V_0$ e di corrente $I(0)=I_0$, per cui valgono le relazioni

$$\begin{cases} V(z=0) = V_0 = V_i + V_r \\ I(z=0) = I_0 = \frac{V_i}{z_C} - \frac{V_r}{z_C} \end{cases}$$

Si definisce allora **coefficiente di riflessione sul carico** il seguente rapporto:

$$\rho_L = \frac{V_r}{V_i}$$

Considerando che V_i e V_r sono, in generale, delle costanti complesse, deduciamo che anche ρ_L è una quantità complessa, dotata cioè di un proprio modulo e di una propria fase: $\rho_L = |\rho_L| \langle \theta$.

E' possibile esprimere questo coefficiente in funzione SOLO dell'impedenza caratteristica della linea z_C e dell'impedenza z_L che rappresenta il carico: per prima cosa, dalle relazioni

$$\begin{cases} V_0 = V_i + V_r \\ I_0 = \frac{V_i}{z_C} - \frac{V_r}{z_C} \end{cases}$$

otteniamo facilmente che

$$\begin{cases} V_i = V_0 - V_r \\ I_0 = \frac{1}{z_C} [(V_0 - V_r) - V_r] \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} V_i = \frac{V_0 + z_C I_0}{2} \\ V_r = \frac{V_0 - z_C I_0}{2} \end{cases}$$

Allora, applicando la definizione data per ρ_L , abbiamo che

$$\rho_L = \frac{V_r}{V_i} = \frac{V_0 - z_C I_0}{V_0 + z_C I_0}$$

Da qui, dividendo ambo i membri per I_0 e ricordando che $V_0 = z_L I_0$, si ricava che

$$\rho_L = \frac{z_L - z_C}{z_L + z_C}$$

Si deduce che, a parità di linea di trasmissione (ossia a parità di z_C) il coefficiente di riflessione dipende SOLO dal carico z_L .

Facciamo notare che l'espressione di ρ_L appena ricavata vale comunque venga preso il sistema di riferimento e qualunque sia il regime di tensione e di corrente presente sulla niente: infatti, questa stessa espressione è stata ricavata all'inizio del capitolo nel caso di un regime qualsiasi.

Coefficiente di trasmissione sul carico

Dalla relazione $\rho_L = \frac{z_L - z_C}{z_L + z_C}$ si deduce una cosa importante: nel caso in cui l'impedenza di carico z_L risulti esattamente pari all'impedenza caratteristica z_C , il coefficiente di riflessione vale 0 e quindi vale 0 anche V_r , cioè appunto l'onda riflessa. In altre parole, possiamo affermare che, *quando $z_L = z_C$, manca l'onda riflessa, il che è sinonimo di adattamento del carico.*

In questa situazione, tutta l'onda (o l'energia) incidente viene trasmessa al carico come se esso fosse una linea infinita di impedenza z_C . Questa condizione si può anche esprimere dicendo che è unitario il cosiddetto **coefficiente di trasmissione sul carico**, definito dalla relazione

$$t = \frac{V_L}{V_i} = \frac{2z_L}{z_L + z_C}$$

E' possibile esprimere anche l'impedenza di ingresso, in corrispondenza della generica sezione z , in funzione del coefficiente di riflessione sul carico: intanto, sappiamo che l'espressione generale per l'impedenza di ingresso si ricava dal sistema

$$\begin{cases} V(z) = V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z} \\ I(z) = \frac{V_i}{z_C} e^{\gamma z} - \frac{V_r}{z_C} e^{-\gamma z} \end{cases}$$

come rapporto tra tensione e corrente, per cui vale

$$z_i(z) = \frac{V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z}}{\frac{V_i}{z_C} e^{\gamma z} - \frac{V_r}{z_C} e^{-\gamma z}} = z_C \frac{V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z}}{V_i e^{\gamma z} - V_r e^{-\gamma z}}$$

Facciamo l'ipotesi che ci siano perdite nulle sulla linea: ciò significa che $\gamma = \alpha + j\beta = j\beta$, per cui si ottiene evidentemente che

$$z_i(z) = z_C \frac{V_i e^{j\beta z} + V_r e^{-j\beta z}}{V_i e^{j\beta z} - V_r e^{-j\beta z}} = z_C \frac{V_i + V_r e^{-j2\beta z}}{V_i - V_r e^{-j2\beta z}}$$

Dividendo ambo i membri per V_i e ricordando che $\rho_L = V_r/V_i$, concludiamo dunque che

$$z_i(z) = z_C \frac{1 + \rho_L e^{-j2\beta z}}{1 - \rho_L e^{-j2\beta z}}$$

Sempre in funzione del coefficiente di riflessione è possibile esprimere anche il rapporto d'onda stazionario ROS, ossia il rapporto tra il valore massimo e quello minimo assunti dal modulo della tensione (o dalla corrente). Intanto, tali valori massimo e minimo vanno ricavati dalla solita equazione

$$V(z) = V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z}$$

(con γ generico). E' infatti evidente da qui che il massimo di tensione si ha quando l'onda incidente è in fase con quella riflessa, mentre il minimo si ha quando le due onde sono in opposizione di fase: quindi

$$\begin{aligned} |V|_{\text{MAX}} &= |V_i| + |V_r| \\ |V|_{\text{MIN}} &= |V_i| - |V_r| \end{aligned}$$

e, applicando la definizione di ROS, abbiamo che

$$\text{ROS} = \frac{|V|_{\text{MAX}}}{|V|_{\text{MIN}}} = \frac{|V_i| + |V_r|}{|V_i| - |V_r|}$$

Dividendo ambo i membri per il modulo di V_i e ricordando sempre che $\rho_L = V_r/V_i$, si deduce subito che

$$\boxed{\text{ROS} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}}$$

dove ovviamente $|\rho_L|$ è il modulo di ρ_L .

Da quella relazione, con qualche semplice passaggio matematico, si ricava anche $|\rho_L|$ in funzione del ROS:

$$|\rho_L| = \frac{\text{ROS} - 1}{\text{ROS} + 1}$$

Ancora, è chiaro che, così come possiamo avere un valore massimo ed un valore minimo per $|V(z)|$, potremo avere anche un valore massimo ed uno minimo per l'impedenza di ingresso, la quale è definita come $V(z)/I(z)$. Vediamo allora quanto valgono questi valori.

L'impedenza di ingresso, in presenza di perdite, è definita come

$$z_i = z_C \frac{V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z}}{V_i e^{\gamma z} - V_r e^{-\gamma z}} = z_C \frac{e^{\gamma z} + \rho_L e^{-\gamma z}}{e^{\gamma z} - \rho_L e^{-\gamma z}} = z_C \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma z}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma z}}$$

Il suo valore massimo si ha quando il numeratore assume il valore massimo e quando il denominatore assume il suo valore minimo: considerando che il termine esponenziale $e^{-2\gamma z}$ ha il valore 1 come valore massimo, deduciamo che risulterà

$$\boxed{z_{i,\text{MAX}} = z_C \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = z_C * \text{ROS}}$$

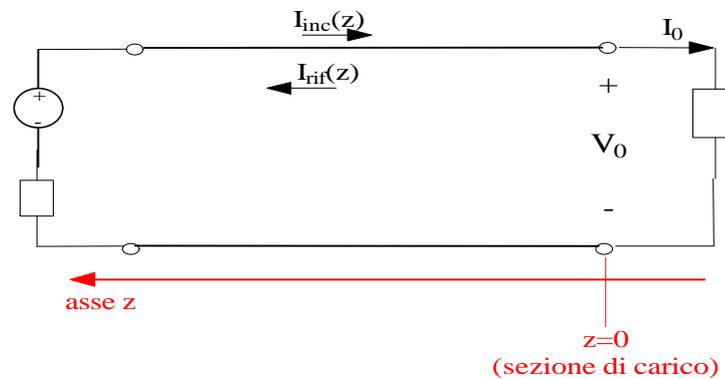
Evidentemente, il valore minimo dell'impedenza di ingresso si ricava con un discorso inverso (valore minimo del numeratore e valore massimo del denominatore), per cui

$$z_{i,MIN} = z_C \frac{1 - |\rho_L|}{1 + |\rho_L|} = \frac{z_C}{ROS}$$

Osservazione

Possiamo arrivare al concetto di coefficiente di riflessione seguendo una strada leggermente diversa (anche se equivalente) da quella seguita prima.

Supponiamo dunque di avere una linea di trasmissione, di lunghezza L , alimentata da un generatore sinusoidale e chiusa su un carico generico z_L :



L'azione del generatore è quella di produrre un'onda (incidente) di tensione ed un'onda (incidente) di corrente che dal generatore stesso si propagano verso il carico: avendo preso l'asse z con origine ($z=0$) sul carico e diretta dal carico verso il generatore, abbiamo già visto che queste due onde incidenti avranno espressioni del tipo

$$\begin{cases} V_{inc}(z) = V_i e^{\gamma z} \\ I_{inc}(z) = \frac{V_i}{z_C} e^{\gamma z} = y_C V_i e^{\gamma z} \end{cases}$$

Dobbiamo capire cosa può succedere quando questa onda progressiva arriva sul carico.

In primo luogo, dire che la linea di trasmissione è chiusa sul carico z_L significa dire che vale la condizione al contorno $V(0) = z_L I(0)$ tra la tensione totale $V(0)$ e la corrente totale $I(0)$ in corrispondenza del carico stesso. Ci sono allora vari casi:

- il primo è quello in cui $z_L = z_C$ (*condizione di adattamento*), dove z_C è l'impedenza caratteristica della linea: in questa situazione si osserva evidentemente che l'onda incidente prima riportata soddisfa, da sola, la condizione $V(0) = z_L I(0)$, per cui, a conferma di quanto detto precedentemente, non si ha la formazione di un'onda riflessa (o regressiva), ossia tutta la potenza fornita dal generatore viene completamente "assorbita" dal carico;

- il secondo caso (quello più realistico) è invece quello in cui $z_L \neq z_C$: questa volta, l'onda incidente non soddisfa la condizione $V(0) = z_L I(0)$, per cui deve necessariamente eccitarsi l'onda riflessa, che dovrà avere una intensità tale da soddisfare la suddetta condizione al contorno.

Ponendoci dunque in questo secondo caso, avremo un'onda riflessa la cui espressione sarà del tipo

$$\begin{cases} V_{\text{rif}}(z) = V_r e^{-\gamma z} \\ I_{\text{rif}}(z) = -\frac{V_r}{z_C} e^{-\gamma z} = -y_C V_r e^{-\gamma z} \end{cases}$$

La condizione al contorno sul carico è dunque

$$V_{\text{inc}}(0) + V_{\text{rif}}(0) = z_L (I_{\text{inc}}(0) + I_{\text{rif}}(0))$$

e, sostituendo le espressioni delle due onde, essa equivale a

$$V_i + V_r = z_L y_C (V_i - V_r)$$

A questo punto, dato che l'ampiezza dell'onda incidente è univocamente determinata dalle sorgenti che generano tale onda, possiamo ritenere noto il valore di V_i e possiamo perciò ricavarci, dall'ultima relazione, il valore di V_r :

$$V_r = \frac{z_L y_C - 1}{z_L y_C + 1} V_i$$

Detto questo, possiamo definire il “*coefficiente di riflessione*” (per la tensione e in corrispondenza del carico) come rapporto tra l'ampiezza dell'onda riflessa e l'ampiezza dell'onda incidente:

$$\rho_L = \frac{V_r}{V_i} = \frac{z_L y_C - 1}{z_L y_C + 1} = \frac{z_L - z_C}{z_L + z_C} = -\frac{y_L - y_C}{y_L + y_C}$$

Si osserva immediatamente che ρ_L vale 0 quando $z_L = z_C$, come anticipato prima. E' inoltre facile verificare che il “*coefficiente di riflessione*” per la corrente (sempre in corrispondenza del carico) risulta essere

$$\rho'_L = \frac{I_r}{I_i} = -\rho_L$$

COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE IN UNA SEZIONE GENERICA

Nei precedenti paragrafi abbiamo definito il coefficiente di riflessione solo in corrispondenza della sezione di carico. In realtà, è possibile definire un coefficiente di riflessione (per la tensione) per qualsiasi sezione della linea, come rapporto tra i fasori di tensione dell'onda regressiva e di quella progressiva: ricordando ancora una volta che, in presenza di perdite sulla linea, risulta $V(z) = V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z}$, scriviamo dunque che

$$\rho(z) = \frac{V_r e^{-\gamma z}}{V_i e^{\gamma z}} = \frac{V_r}{V_i} e^{-2\gamma z}$$

Sfruttando questa relazione, possiamo riscrivere la tensione e la corrente lungo la linea nel modo seguente:

$$V_r = \rho(z) \cdot V_i e^{2\gamma z} \longrightarrow \begin{cases} V(z) = V_i e^{\gamma z} + \rho(z) \cdot V_i e^{2\gamma z} e^{-\gamma z} = V_i e^{\gamma z} (1 + \rho(z)) \\ I(z) = \frac{V_i}{z_c} e^{\gamma z} - \frac{\rho(z) \cdot V_i e^{2\gamma z}}{z_c} e^{-\gamma z} = \frac{V_i}{z_c} e^{\gamma z} (1 - \rho(z)) \end{cases}$$

Ovviamente, anche l'impedenza di ingresso, in corrispondenza della generica sezione z , può essere espressa in funzione di $\rho(z)$: basta fare il rapporto tra le espressioni appena ricavate per $V(z)$ e $I(z)$ per ottenere che

$$z_i(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = z_c \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)}$$

Adesso applichiamo questa relazione alla sezione di carico, ossia per $z=0$: è ovvio che al primo membro otteniamo l'impedenza di carico z_L , mentre il termine $\rho(z)$ a secondo membro viene a coincidere con il ρ_L .

Una importante conseguenza di quella relazione si ottiene confrontandola con l'espressione precedentemente ricavata di $z_i(z)$ in funzione proprio di ρ_L e nell'ipotesi di assenza di perdite: avevamo infatti trovato che

$$z_i(z) = z_c \frac{1 + \rho_L e^{-j2\beta z}}{1 - \rho_L e^{-j2\beta z}}$$

Confrontando le due espressioni, è evidente che

$$\boxed{\rho(z) = \rho_L e^{-j2\beta z}}$$

Questa importante relazione ci dice che *il coefficiente di riflessione in una qualsiasi sezione della linea può essere posto in relazione con il coefficiente di riflessione al carico*, che è calcolabile direttamente tramite la

relazione $\rho_L = \frac{z_L - z_c}{z_L + z_c}$. La differenza tra $\rho(z)$ e ρ_L è in una rotazione di fase di valore $-2\beta z$,

dipendente dalla sezione che si sta considerando. In altre parole, *allontanandoci dal carico, il modulo del coefficiente di riflessione rimane invariato rispetto a $|\rho_L|$, mentre la fase ruota di $-2\beta z$.*

FLUSSO DI POTENZA

Abbiamo ipotizzato sin dall'inizio che i campi che si propagano lungo la linea di trasmissione abbiano una struttura TEM e cioè siano in ciascun punto trasversali all'asse della linea stessa (asse z). Calcolando allora il vettore di Poynting come prodotto vettoriale tra il campo elettrico ed il complesso coniugato del campo magnetico, si ottiene, come direzione, proprio quella dell'asse z . Quindi, il flusso di potenza medio avviene lungo la direzione z e non poteva essere altrimenti.

A livello analitico, la potenza media lungo la direzione z si può calcolare in funzione della tensione e della corrente lungo la linea:

$$P_{\text{media}}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V(z)I^*(z)\}$$

Sostituiamo le espressioni dei fasori della tensione e della corrente, nel caso semplice di una linea senza perdite:

$$\begin{cases} V(z) = V_i e^{j\beta z} (1 + \rho(z)) \\ I(z) = \frac{V_i}{z_c} e^{j\beta z} (1 - \rho(z)) \end{cases} \longrightarrow P_{\text{media}}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V(z)I^*(z)\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{V_i e^{j\beta z} (1 + \rho(z)) \cdot \left[\frac{V_i}{z_c} e^{j\beta z} (1 - \rho(z))\right]^*\right\} = \\ = \frac{1}{2} |V_i|^2 \frac{1}{z_c^*} \operatorname{Re}\{(1 + \rho(z)) \cdot (1 - \rho(z))^*\}$$

Ricordando adesso che, in assenza di perdite, risulta $\rho(z) = \rho_L e^{-j2\beta z}$, deduciamo facilmente quale sia il risultato finale:

$$P_{\text{media}}(z) = \frac{1}{2} |V_i|^2 \frac{1}{z_c^*} (1 - |\rho_L|^2)$$

Questa espressione ci dice quando segue:

- se la linea è adattata, per cui risulta $\rho_L = 0$, la potenza media raggiunge il suo massimo valore $\frac{1}{2} |V_i|^2 \frac{1}{z_c^*}$ (legato essenzialmente al valore dell'impedenza caratteristica), ossia è interamente trasferita al carico;
- se il carico è invece un cortocircuito oppure un circuito aperto, sappiamo che il coefficiente di riflessione ρ_L ha modulo unitario, per cui la potenza media è nulla; ciò significa che tutta la potenza incidente viene riflessa.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
 e-mail: sandry@iol.it
 sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
 succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>