Appunti di
Campi Elettromagnetici
Onde piane in mezzi senza perdite

INTRODUZIONE

Lo studio delle cosiddette **onde piane** è molto utile per due motivi essenziali:

- intanto, *esse rappresentano una buona approssimazione delle onde che effettivamente si propagano in gran parte dei casi di interesse pratico*, specialmente quando ci si pone ad una sufficiente distanza dalla sorgente che le ha generate;
- inoltre, *molti casi più complessi di propagazione possono essere risolti considerando una sovrapposizione di onde piane*: un esempio tipico sono le **linee di trasmissione**, dove si propagano due onde piane, una incidente e l'altra riflessa, entrambe di tipo **TEM** (*Trasverso ElettroMagnetico*, ossia con campo elettrico e campo magnetico ortogonali tra loro e ortogonali alla direzione di propagazione).

EQUAZIONI DELLE ONDE PIANE: EQUAZIONE DI HELMOLTHZ

Il nostro scopo è quello di studiare l'evoluzione, SIA nello spazio SIA nel tempo, del campo elettrico e del campo magnetico. Per prima cosa, dobbiamo ricavare le equazioni generali cui devono obbedire il campo elettrico ed il campo magnetico quando si propagano in un mezzo con le seguenti caratteristiche:

- si tratta di un **mezzo omogeneo**, il che significa che la conducibilità σ, la permettività μ e la permeabilità ε sono ovunque costanti;
- si tratta inoltre di un **mezzo isotropo**, il che significa che σ, μ ed ε sono semplicemente degli scalari, ed in particolare di un **mezzo perfettamente isolante**, il che significa σ=0;

- si tratta, infine, di un **mezzo privo di cariche libere**, cioè con $\rho(\vec{r}) = 0$, e **privo anche di generatori di corrente o tensioni impresse**, cioè tale che $\vec{J}(\vec{r}) = 0$.

Facciamo osservare che, sotto tutte queste ipotesi, il mezzo considerato può essere tranquillamente considerato come lo <u>spazio libero privo di perdite</u>, il quale infatti costituisce un dielettrico perfetto quando si tratta del vuoto (cioè quando $\mu=\mu_0$ e $\varepsilon=\varepsilon_0$).

Il punto di partenza sono le **equazioni di Maxwell** ed in particolare le prime due:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Sottolineiamo che, per il momento, stiamo ragionando nel **dominio del tempo**, per cui <u>queste sono equazioni solo vettoriali, che cioè includono solo i vettori rappresentativi del campo elettrico, del campo magnetico, del campo di induzione magnetica e della densità di spostamento</u>.

Avendo detto che $\vec{J}(\vec{r}) = 0$, la seconda equazione diventa

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Inoltre, avendo detto che μ ed ε sono degli scalari, possiamo usare le seguenti **relazioni costitutive** del mezzo considerato:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Sostituendo, abbiamo dunque che

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Adesso calcoliamo il *rotore* di entrambi i membri di entrambe queste equazioni:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)$$
$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \varepsilon \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Il segno di derivata può essere portato fuori dall'operatore *rotore* (che è lineare), per cui

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right)$$
$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{E}\right)$$

Sfruttando sempre le stesse equazioni di Maxwell $\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ e $\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, possiamo modificare le espressioni dei secondi membri della relazioni ottenute:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Ponendo adesso

$$c \;=\; \text{velocità della luce} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

quelle equazioni diventano

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Passiamo a semplificare i secondi membri: è facile verificare che, dato un generico campo vettoriale $\vec{A}$, vale la relazione

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\nabla\bullet\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$$

Applicandola al campo elettrico ed a quello magnetico, otteniamo

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\nabla\nabla\bullet\vec{E}-\nabla^2\vec{E}$$
$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla\nabla\bullet\vec{H}-\nabla^2\vec{H}$$

per cui le nostre relazioni diventano

$$\nabla\nabla\bullet\vec{E}-\nabla^2\vec{E}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\nabla\nabla\bullet\vec{H}-\nabla^2\vec{H}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Possiamo però ancora semplificare: in primo luogo, sappiamo che $\nabla\bullet\vec{H}=0$, per cui la seconda equazione diventa

$$\nabla^2\vec{H}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Inoltre, in base alla terza equazione di Maxwell $\nabla\bullet\vec{D}=\rho$, avendo supposto che $\rho=0$, abbiamo evidentemente che $\nabla\bullet\vec{D}=0$ e quindi anche, sfruttando la relazione costitutiva $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, che $\nabla\bullet\vec{E}=0$: di conseguenza, la prima equazione diventa

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

In conclusione, quindi, le equazioni che regolano la propagazione del campo elettrico e del campo magnetico nel mezzo considerato sono

$$\nabla^2\vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Queste sono delle equazioni differenziali lineari, del 2° ordine, che legano le derivate parziali relative alle coordinate spaziali (cioè l'operatore ∇^2) con la derivata rispetto al tempo.

Un caso particolare è quello in cui le sorgenti che generano questi due campi sono di tipo sinusoidale $e^{j\omega t}$: in questo caso, supponendo di trovarci in **regime sinusoidale permanente**, possiamo passare nel **dominio dei fasori** semplicemente sostituendo l'operatore $\partial/\partial t$ con l'operatore $j\omega$ e considerando i vettori presenti come anche dei fasori (cioè numeri complessi, dotati perciò di modulo e fase). Le equazioni diventano dunque le seguenti:

$$\boxed{\begin{array}{l}\nabla^2\vec{H} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{H} = 0\\ \nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} = 0\end{array}}$$

Quelle appena scritte sono note come **equazioni vettoriali (fasoriali) delle onde** o anche **equazioni di Helmolthz**: si tratta di equazioni differenziali alle derivate parziali, con coefficienti costanti e dobbiamo trovare il modo di risolverle.

RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI HELMOLTHZ: IL CAMPO ELETTRICO

Dobbiamo dunque risolvere le equazioni

$$\nabla^2\vec{H} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{H} = 0$$
$$\nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} = 0$$

Per nostra comodità, poniamo $\boxed{k^2 = \omega^2\mu\varepsilon}$, per cui le due equazioni diventano

$$\nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = 0$$
$$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$$

Dato che si tratta di <u>due equazioni formalmente identiche</u>, ne risolviamo solo una, per esempio quella del campo elettrico. Cominciamo col ricordare l'espressione completa dell'operatore $\nabla^2[\ ]$ e, in particolare, le espressioni delle sue tre componenti in un generico sistema di riferimento Oxyz:

$$\left(\nabla^2\vec{E}\right)_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

$$\left(\nabla^2\vec{E}\right)_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}$$

$$\left(\nabla^2\vec{E}\right)_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}$$

Allora, l'equazione vettoriale (e anche fasoriale) $\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$ equivale alle tre equazioni scalari

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0$$

N.B. Già a questo punto si deduce un risultato fondamentale: *ciascuna componente del campo elettrico (e ovviamente anche di quello magnetico) evolve nello spazio e nel tempo in modo del tutto indipendente dalla presenza e dalla evoluzione delle altre componenti.* Naturalmente, come vedremo più avanti e come indicano le equazioni di Maxwell, il campo elettrico ed il campo magnetico sono strettamente collegati tra loro e l'esistenza di certe componenti del primo implica quelle di altre componente del secondo.

Anche qui abbiamo tre equazioni formalmente identiche, per cui risolviamo solo la prima: in particolare, proviamo a verificare se essa è soddisfatta da una soluzione del tipo

$$E \quad ,y,z = (x)g \quad)q(z$$

Per fare questa verifica, dobbiamo imporre che questa soluzione verifichi l'equazione: allora, dato che

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{df(x)}{dx} g(y)q(z) \longrightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} g(y)q(z)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = f(x)\frac{dg(y)}{dy} q(z) \longrightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = f(x)\frac{d^2 g(y)}{dy^2} q(z)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = f(x)g(y)\frac{dq(z)}{dz} \longrightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = f(x)g(y)\frac{d^2 q(z)}{dz^2}$$

l'equazione che risulta dalla sostituzione è

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} g(y)q(z) + f(x)\frac{d^2 g(y)}{dy^2} q(z) + f(x)g(y)\frac{d^2 q(z)}{dz^2} + k^2 f(x)g(y)q(z) = 0$$

Dividendo per f(x)g(y)q(z) otteniamo

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{1}{g(y)}\frac{d^2g(y)}{dy^2}+\frac{1}{q(z)}\frac{d^2q(z)}{dz^2}=-k^2$$

Abbiamo dunque ottenuto che la somma di tre termini, uno variabile solo con x, uno variabile solo con y ed uno variabile solo con z, deve essere pari ad una costante. Allora, poniamo arbitrariamente

$$-k_x^2=\frac{1}{f(x)}\frac{d^2f(x)}{dx^2} \qquad -k_y^2=\frac{1}{g(y)}\frac{d^2g(y)}{dy^2} \qquad -k_z^2=\frac{1}{q(z)}\frac{d^2q(z)}{dz^2}$$

e determiniamo questi fattori in modo che sia verificata l’equazione

$$\boxed{k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2}$$

che prende il nome di **equazione di separazione**.

Dobbiamo dunque semplicemente risolvere quelle tre equazioni differenziali, che possono essere poste, in forma per noi più comoda, nel modo seguente:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}+k_x^2f(x)=0 \qquad \frac{d^2g(y)}{dy^2}+k_y^2g(y)=0 \qquad \frac{d^2q(z)}{dz^2}+k_z^2q(z)=0$$

Si tratta di equazioni differenziali, ciascuna in una sola variabile, di ordine 2, omogenee a coefficienti costanti: le rispettive soluzioni sono

$$\begin{aligned} f(x)&=Ae^{jk_xx}+Be^{-jk_xx}\\ g(y)&=Ce^{jk_yy}+De^{-jk_yy}\\ q(z)&=Ee^{jk_zz}+Fe^{-jk_zz}\end{aligned}$$

Queste, per comodità di calcolo, possono anche essere scritte, in forma più compatta, come

$$\begin{aligned} f(x)&=Ae^{\pm jk_xx}\\ g(y)&=Be^{\pm jk_yy}\\ q(z)&=Ce^{\pm jk_zz}\end{aligned}$$

dove però dobbiamo sempre ricordare che, per ciascuna funzione, la costante moltiplicativa del termine e^{jk_xx} è diversa da quella del termine e^{-jk_xx}, per cui i due termini sono ben distinti.

Ovviamente, queste soluzioni saranno univocamente determinate solo a patto di determinare le 6 costanti che compaiono. Possiamo però semplificarci i calcoli nel modo seguente: intanto, ricordando che $E_x(x,y,z)=f(x)g(y)q(z)$, abbiamo che

$$E_x(x,y,z)=Ae^{\pm jk_xx}Be^{\pm jk_yy}Ce^{\pm jk_zz}=ABCe^{\pm j(k_xx+k_yy+k_zz)}$$

Se adesso poniamo

$$E_{0X} = ABC$$
$$\vec{k} = k_x \vec{a}_x + k_y \vec{a}_y + k_z \vec{a}_z$$
$$\vec{r} = r_x \vec{a}_x + r_y \vec{a}_y + r_z \vec{a}_z$$

è evidente che possiamo scrivere

$$\boxed{E_x(x,y,z) = E_{0X} e^{\pm j\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)}}$$

Naturalmente, con un procedimento assolutamente identico, le soluzioni delle altre due equazioni

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0$$
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0$$

risultano essere

$$\boxed{\begin{aligned} E_y(x,y,z) &= E_{0Y} e^{\pm j\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)} \\ E_z(x,y,z) &= E_{0Z} e^{\pm j\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)} \end{aligned}}$$

ed è ovvio come le tre relazioni trovate differiscano solo per i valori delle costanti E_{0X}, E_{0Y} ed E_{0Z}.

Il campo elettrico totale sarà evidentemente

$$\vec{E} = E_x \vec{a}_x + E_y \vec{a}_y + E_z \vec{a}_z$$

ossia

$$\vec{E}(x,y,z) = \left(E_{0X} \vec{a}_x + E_{0Y} \vec{a}_y + E_{0Z} \vec{a}_z\right) e^{\pm j\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)}$$

Possiamo inoltre porre

$$\vec{E}_0 = E_{0X} \vec{a}_x + E_{0Y} \vec{a}_y + E_{0Z} \vec{a}_z$$

per cui la soluzione generale è

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm j\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)}}$$

Se poi vogliamo riferirci al dominio convenzionale del tempo, dobbiamo semplicemente applicare le note **formule di antitrasformazione**, scrivendo che

$$\boxed{\vec{e}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 e^{\pm j\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)} e^{j\omega t}\right]}$$

Il vettore d'onda

Il vettore $\vec{k} = k_x\vec{a}_x + k_y\vec{a}_y + k_z\vec{a}_z$, il cui modulo è evidentemente $\left|\vec{k}\right| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, prende il nome di **vettore d'onda** e possiamo vedere meglio di cosa si tratta.

Nelle nostre ipotesi, sussiste in ogni punto dello spazio la relazione $\nabla \bullet \vec{E} = 0$: vediamo allora di calcolare l'espressione di quella divergenza, al fine di porla uguale a zero. Supponendo di lavorare sempre nel dominio dei fasori, abbiamo che

$$\nabla \bullet \vec{E} = \nabla \bullet \left(\vec{E}_0 e^{\pm j(\vec{k}\bullet\vec{r})}\right) = e^{\pm j(\vec{k}\bullet\vec{r})}\nabla \bullet \vec{E}_0 + \vec{E}_0 \bullet \nabla\left(e^{\pm j(\vec{k}\bullet\vec{r})}\right)$$

Essendo $\vec{E}_0$ una costante, risulta $\nabla \bullet \vec{E}_0 = 0$, per cui

$$\nabla \bullet \vec{E} = \nabla \bullet \vec{E}_0 \bullet \nabla\left(e^{\pm j(\vec{k}\bullet\vec{r})}\right) = \nabla \bullet \vec{E}_0 \bullet \left(e^{\pm j(\vec{k}\bullet\vec{r})}\left(k_x\vec{a}_x + k_y\vec{a}_y + k_z\vec{a}_z\right)\right) = e^{\pm j(\vec{k}\bullet\vec{r})}\vec{E}_0 \bullet \left(k_x\vec{a}_x + k_y\vec{a}_y + k_z\vec{a}_z\right)$$

e quindi, ricordando la definizione del vettore $\vec{k}$, possiamo concludere che

$$\nabla \bullet \vec{E} = e^{\pm j(\vec{k}\bullet\vec{r})}\vec{E}_0 \bullet \vec{k} = \vec{E} \bullet \vec{k}$$

D'altra parte, dovendo essere $\nabla \bullet \vec{E} = 0$ in ogni punto, deduciamo che

$$\boxed{\vec{E} \bullet \vec{k} = 0}$$

Questa relazione ci dice che *il vettore campo elettrico* $\vec{E}$ *ed il vettore d'onda* $\vec{k}$ *sono ortogonali tra di loro.*

L'onda piana uniforme

La soluzione $\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0 e^{\pm j\vec{k}\bullet\vec{r}} e^{j\omega t}$ prende il nome di **onda piana uniforme**. Vediamo il perché di questo nome.

Intanto, si chiama **fase** dell'onda $\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0 e^{\pm j\vec{k}\bullet\vec{r}} e^{j\omega t}$ la quantità

$$\varphi = \vec{k} \bullet \vec{r} + \omega t = k_x x + k_y y + k_z z + \omega t$$

(ossia l'argomento complessivo dell'esponenziale). E' evidente, allora, che, fissato un qualsiasi istante t, il luogo dei punti dell'onda che si trovano a fase costante è definito dalla relazione

$$\varphi = \vec{k} \bullet \vec{r} + \omega t = \cos t$$

Questo luogo di punti a fase costante (che prende il nome di **fronte d'onda**) risulta essere un <u>piano ortogonale alla direzione su cui giace il vettore d'onda $\vec{k}$</u> ed è questo il motivo per cui si parla di onda "*piana*". L'aggettivo "*uniforme*" si riferisce invece al fatto per cui il campo elettrico (e vedremo anche il campo magnetico) è costante su ciascun fronte d'onda.

IL CAMPO MAGNETICO

Per ricavare il campo magnetico associato alla generica onda piana, abbiamo a disposizione due strade: la prima è quella di effettuare gli stessi passaggi visti fino ad ora, applicati però all'equazione

$$\nabla^2\vec{H}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{H}=0$$

La seconda strada, invece, è quella di utilizzare l'espressione ricavata per il campo elettrico e la relazione che lo lega al campo magnetico (nel dominio sempre dei fasori) :

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$$

Seguiamo ovviamente questa seconda strada: tenendo conto che il campo elettrico è risultato essere $\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}_0e^{\pm j\vec{k}\bullet\vec{r}}$, abbiamo che

$$\vec{H}=-\frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\left(\vec{E}_0e^{\pm j\vec{k}\bullet\vec{r}}\right)=-\frac{1}{j\omega\mu}e^{\pm j\vec{k}\bullet\vec{r}}\left(\nabla\times\vec{E}_0\right)-\frac{1}{j\omega\mu}\left(\nabla e^{\pm j\vec{k}\bullet\vec{r}}\right)\times\vec{E}_0$$

Tenendo conto che $\nabla\times\vec{E}_0=0$ (visto che $\vec{E}_0$ è una costante) e facendo i calcoli solo per l'onda $\vec{E}_0e^{j\vec{k}\bullet\vec{r}}$, abbiamo che

$$\vec{H}=-\frac{1}{j\omega\mu}\left(\nabla e^{j\vec{k}\bullet\vec{r}}\right)\times\vec{E}_0=-\frac{1}{j\omega\mu}\left(e^{j\vec{k}\bullet\vec{r}}j\left(k_x\vec{a}_x+k_y\vec{a}_y+k_z\vec{a}_z\right)\right)\times\vec{E}_0=-\frac{1}{j\omega\mu}\left(je^{j\vec{k}\bullet\vec{r}}\vec{k}\right)\times\vec{E}_0=\frac{1}{\omega\mu}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right)e^{j\vec{k}\bullet\vec{r}}$$

Ponendo adesso $\vec{k}=k\vec{a}_k=\left(\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\vec{a}_k$, abbiamo che

$$\vec{H}=\frac{1}{\omega\mu}\left(\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\left(\vec{a}_k\times\vec{E}_0\right)e^{j\vec{k}\bullet\vec{r}}=\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)\left(\vec{a}_k\times\vec{E}_0\right)e^{j\vec{k}\bullet\vec{r}}=\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)\left(\vec{a}_k\times\vec{E}\right)$$

Ponendo infine

$$\eta=\text{ impedenza caratteristica del mezzo }=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

possiamo concludere che

$$\vec{H}(x,y,z)=\frac{1}{\eta}\left(\vec{a}_k\times\vec{E}\right)$$

Se, ancora una volta, facciamo riferimento al dominio del tempo, possiamo dunque concludere che

$$\boxed{\vec{h}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\eta}\left(\vec{a}_k\times\vec{E}\right)e^{j\omega t}\right]}$$

Da questa espressione scaturiscono due importanti considerazioni:

- in primo luogo, si osserva, in base alle proprietà del prodotto vettoriale, che il campo magnetico ed il campo elettrico sono in ogni punto ortogonali tra loro e a loro volta ortogonali al vettore d'onda $\vec{k}$; in particolare, *la terna* $\vec{e},\vec{h},\vec{k}$ *rappresenta una* *__terna destrogira__ se si considera l'onda diretta (cioè se si considera il termine* $e^{-j\vec{k}\bullet\vec{r}}$ *per il campo elettrico) oppure una* *__terna sinistrogira__ se si considera l'onda riflessa (cioè se si considera il termine* $e^{j\vec{k}\bullet\vec{r}}$ *per il campo elettrico);*

- in secondo luogo, si osserva anche che *il campo elettrico e il campo magnetico sono in fase tra di loro*: ciò significa, in termini concreti, che quando è massimo (o minimo o nullo) il campo elettrico, è massimo (o minimo o nullo) il campo magnetico; ovviamente, sono diversi i moduli dei due campi, visto che il modulo del campo magnetico è più piccolo di quello del campo elettrico di una quantità pari all'impedenza caratteristica del mezzo considerato.

RIEPILOGO

Possiamo dunque riassumere quanto detto fino ad ora nel modo seguente: le soluzioni delle equazioni

$$\nabla^2\vec{H} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{H} = 0$$
$$\nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} = 0$$

relative ad un mezzo omogeneo (σ=0, μ e ε ovunque costanti), isotropo (σ, μ ed ε scalari) e privo di cariche libere ($\rho(\vec{r}) = 0$) e di generatori di corrente o tensioni impresse ($\vec{J}(\vec{r}) = 0$), sono rappresentate, nel dominio del tempo, dai campi

$$\vec{e}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 e^{\pm j\vec{k}\bullet\vec{r}} e^{j\omega t}\right]$$
$$\vec{h}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\eta}\left(\vec{a}_k \times \vec{E}\right)e^{j\omega t}\right]$$

Tali campi rappresentano un *__onda piana uniforme__*, ossia una perturbazione elettromagnetica avente le seguenti caratteristiche:

- il campo elettrico ed il campo magnetico siano in ogni punto ortogonali tra loro e ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda;
- i fronti d'onda sono piani a fase costante ortogonali alla direzione di propagazione;
- tale direzione di propagazione è rappresentata dal vettore d'onda $\vec{k} = \left(\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\vec{a}_k$.

In base a quanto appena detto, questo tipo di propagazione prende il nome di **onda TEM** o anche **modo TEM** dove l'acronimo TEM sta per *Transverse Electric Magnetic*.

Lunghezza d'onda e velocità di fase

Abbiamo detto prima che la funzione $\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}_0 e^{\pm j\vec{k}\bullet\vec{r}}$ rappresenta l'andamento spaziale del campo elettrico (nel dominio della frequenza); sappiamo, invece, che il campo elettrico fisico corrispondente a questo campo si ottiene prendendo la parte reale di quella quantità: allora, nell'ipotesi in cui il termine $\vec{E}_0$ sia reale, tale campo elettrico fisico è

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 e^{\pm j\vec{k}\bullet\vec{r}} e^{j\omega t}\right]=\vec{E}_0\,\mathrm{Re}\left[e^{\pm j\vec{k}\bullet\vec{r}} e^{j\omega t}\right]=\vec{E}_0\cos\left(\left(\vec{k}\bullet\vec{r}\right)-\omega t\right)$$

dove abbiamo sfruttato la nota formula $e^{x+jy}=e^x(\cos y+j\sin y)$ ed abbiamo inoltre considerato, nel calcolare la parte reale, solo l'onda diretta $e^{-j\vec{k}\bullet\vec{r}}$.

Diamo adesso qualche definizione:

Def. *Si definisce* ***lunghezza d'onda*** *(simbolo: l) la distanza che l'onda deve percorrere perché la sua fase cambi di 2p*

Da un punto di vista analitico, quindi, la lunghezza d'onda λ è quella quantità che soddisfa la relazione $k\lambda=2\pi$, dalla quale, quindi, si ricava che

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}$$

Ma, avendo detto che $\vec{k}=\left(\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\vec{a}_k$, è chiaro che

$$\boxed{\lambda=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{f}}$$

(dove c è la frequenza della luce nel mezzo considerato, mentre f è la frequenza) e questo è dunque il v*alore della lunghezza d'onda per un'onda piana uniforme*.

Altra definizione importante è la seguente:

Def. *Si definisce* ***velocità di fase*** *di un'onda (simbolo* $\boldsymbol{v_P}$ *dove "P" sta per "phase") la velocità alla quale deve muoversi un osservatore perché veda una fase complessiva costante.*

In alternativa, la velocità di fase si può definire come la velocità con cui si spostano i punti in cui il campo ha la stessa fase.

L'espressione analitica della velocità di fase si ricava nel modo seguente: perché l'osservatore veda una fase $\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t$ costante, deve accadere che

$$\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t=\mathrm{cost}$$

Indicato con θ l’angolo tra il vettore d’onda ed il raggio vettore, quella relazione diventa

$$kr\cos\theta - \omega t = \cos t$$

Differenziando membro a membro rispetto a t, otteniamo

$$kdr\cos\theta - \omega dt = 0$$

da cui quindi otteniamo

$$v_P = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k\cos\theta}$$

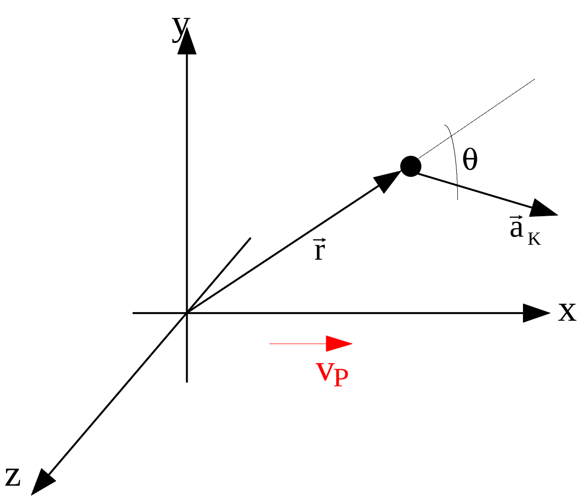
Sostituendo il valore del modulo del vettore d’onda, otteniamo

$$v_P = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\cos\theta}$$

Ricordandoci adesso che abbiamo definito la velocità della luce nel mezzo considerato come $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, quella relazione diventa

$$\boxed{v_P = \frac{c}{\cos\theta}}$$

Dato che cosθ≤1, è evidente che la velocità di fase nella direzione x è sempre maggiore della velocità della luce, che è invece la velocità dell’onda lungo la direzione del vettore d’onda, ossia lungo la direzione di propagazione.



Osservazione

Torniamo per un attimo alle equazioni da cui siamo partiti all'inizio:

$$\nabla^2\vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Supponiamo di effettuare una scelta del sistema di riferimento in modo tale che la direzione di propagazione, individuata dal versore $\vec{a}_K$, venga a coincidere con l'asse z. In questa situazione, avendo detto che sul generico fronte d'onda (che adesso è un piano ortogonale all'asse z) il campo elettromagnetico è costante, deduciamo che tale campo non presenta variazioni con x e con y, per cui rimangono solo la dipendenza dalla coordinata z e dal tempo: ciò comporta che quelle due equazioni si riducano semplicemente a

$$\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Si tratta di due equazioni vettoriali che possono essere poi proiettate lungo le tre direzioni del sistema di riferimento prescelto: rispetto all'asse x, per esempio, abbiamo che

$$\frac{\partial^2 H_X}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_X}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2}$$

Consideriamo solo l'equazione relativa al campo elettrico, visto che l'altra è formalmente identica: è possibile dimostrare che le soluzioni di tale equazione sono del tipo

$$E_X(z,t) = Af_1(z - vt) + Bf_2(z + vt)$$

In base a quella relazione, $E_X(z,t)$ è somma di due onde:

- la prima onda è $Af_1(z - vt)$, dove A è una costante arbitraria (che viene fuori dalla integrazione e dipende dalle cosiddette "*condizioni al contorno*" del problema), mentre $f_1(z - vt)$ è una funzione arbitraria dell'argomento $(z - vt)$, che rappresenta una onda che si propaga nel verso positivo dell'asse z;
- la seconda onda è $Bf_2(z + vt)$, dove B è un'altra costante arbitraria (sempre dipendente dalle "*condizioni al contorno*"), mentre $f_2(z + vt)$ rappresenta una onda che si propaga nel verso negativo dell'asse z.

E' immediato accorgersi $f_1(z - vt)$ e $f_2(z + vt)$ sono delle "onde piane" : intanto, queste onde, non presentando dipendenza dalle coordinate x ed y, assumono ciascuna, all'istante t generico, un valore costante su tutti i punti di ogni piano perpendicolare all'asse z. Cerchiamo allora di capire meglio quali sono le caratteristiche di queste onde.

Consideriamo ad esempio $f_1(z-vt)$: fissati un punto z_1 ed un istante t_1, il valore che essa assume in tale punto ed in tale istante è chiaramente dato da $f_1(z_1-vt_1)$; se ora prendiamo un nuovo punto $z_1+\Delta z$ ed un nuovo istante $t_1+\Delta t$, il corrispondente valore della funzione sarà $f_1((z_1+\Delta z)-v(t_1+\Delta t))$. Allora, se imponiamo l'uguaglianza tra questi due valori, ossia imponiamo che

$$f_1((z_1+\Delta z)-v(t_1+\Delta t)) = f_1(z_1-vt_1)$$

è chiaro che questa relazione sussiste solo a patto che coincidano i due argomenti di f_1, ossia che risulti

$$(z_1+\Delta z)-v(t_1+\Delta t) = z_1-vt_1$$

che corrisponde a $v=\frac{\Delta z}{\Delta t}$.

Questo risultato significa che *i valori che $f_1(z-vt)$ assume nei vari punti all'istante t_1 si trasferiscono, durante il tempo Dt, nel verso positivo dell'asse z (**onda progressiva**), con una velocità $v=\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.*

Potremmo adesso ripetere lo stesso discorso con riferimento a $f_2(z+vt)$: la conclusione è, in questo caso, che $f_2(z+vt)$ *rappresenta un'onda piana che viaggia nel verso negativo dell'asse x (**onda regressiva**).* Infatti, il valore assunto da $f_2(z+vt)$ nel punto z_1 al tempo t_1 viene successivamente assunto da $f_2(z+vt)$ nel punto $z_1-\Delta z$ in un nuovo istante $t_1+\Delta t$, propagandosi con una velocità $v=-\frac{\Delta z}{\Delta t}$.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1