Appunti di Teoria dei Segnali

Capitolo 1 - Introduzione ai segnali

Segnali continui

DEFINIZIONI INTRODUTTIVE

Un "**segnale**" è, per definizione una funzione del tipo

$$\begin{aligned} s : \mathrm{R} &\longrightarrow \mathrm{C} \\ t &\longrightarrow s(t) \end{aligned}$$

ossia una _funzione di variabile reale a valori complessi_.

Si definisce "**energia**" di un segnale la quantità

$$\boxed{E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt}$$

E' chiaro che quell'integrale può convergere o meno a seconda delle caratteristiche della funzione s(t). Sussiste allora la seguente definizione: *s(t) è un "**segnale ad energia finita**" o semplicemente un "**segnale di energia**" se quell'integrale converge, ossia se E_S risulta essere un numero reale (ovviamente positivo).*

Si definisce invece "**potenza**" di un segnale la quantità

$$\boxed{P_S = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |s(t)|^2 dt}$$

Anche in questo caso, la convergenza dell'integrale dipende dalle caratteristiche della funzione s(t). Allora diremo che *s(t) è un "**segnale a potenza finita**" o semplicemente un "segnale di potenza" se quell'integrale converge e se il limite del suo valore risulta essere un valore reale non nullo*

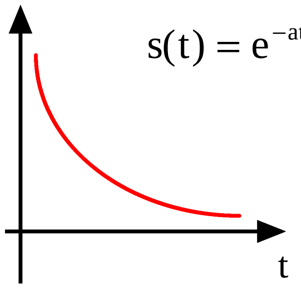
Dalle due definizioni matematiche appena date si nota come esse siano strettamente legate; in particolare, sussistono i seguenti due teoremi, facili da verificare:

- se s(t) è un segnale di energia, ossia se $E_S \in]0,+\infty[\;\rightarrow P_S=0$, ossia s(t) non è un segnale di potenza

- se s(t) è un segnale di potenza, ossia se $P_S \in]0,+\infty[\;\rightarrow E_S=\infty$, ossia s(t) non è un segnale di energia

ESEMPIO: SEGNALE ESPONENZIALE

Consideriamo il seguente segnale:



$$s(t) = e^{-at} \qquad \begin{cases} t > 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

Verifichiamo, applicando la semplice definizione, se si tratta di un "*segnale di energia*": applicando la definizione abbiamo che

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-at} \right|^2 dt$$

Trattandosi di un segnale reale, il modulo quadro del segnale equivale semplicemente al quadrato, per cui

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2at} dt$$

Il segnale è per ipotesi nullo per t<0, per cui possiamo restringere l'intervallo di integrazione e poi proseguire con i calcoli:

$$E_S = \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = -\frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} (-2a) e^{-2at} dt = -\frac{1}{2a} \left[e^{-2at} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2a} \left[\frac{1}{e^{2at}} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2a}$$

Avendo trovato un valore finito, deduciamo che *il segnale esponenziale è un segnale ad energia finita e, di conseguenza, a potenza nulla.*

ESEMPIO: COSENO

Consideriamo ora quest'altro segnale:

$$s(t) = A \cos(2\pi f t + \theta)$$

Verifichiamo che questo NON è un segnale ad energia finita; per farlo, anziché valutare l'energia, controlliamo quanto vale la sua potenza (che deve risultare finita): per definizione, abbiamo intanto che

$$P_S = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left| A \cos(2\pi f t + \theta) \right|^2 dt$$

Il "coseno" è una funzione reale, per cui il modulo quadro equivale al semplice quadrato:

$$P_S = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A^2 \cos^2(2\pi f t + \theta) dt$$

La funzione integranda può essere semplificata tenendo conto che sussiste la relazione

$$\boxed{\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)}$$

che è ottenibile applicando le formule di duplicazione del coseno.

Nel nostro caso, abbiamo perciò che

$$P_S = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi ft + 2\theta) \right] dt$$

Scomponendo i due integrali, otteniamo

$$P_S = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^{+T} dt + \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^{+T} \frac{1}{2}\cos(4\pi ft + 2\theta)dt = \frac{A^2}{2} + \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^{+T} \cos(4\pi ft + 2\theta)dt$$

Risolviamo subito l'integrale:

$$\int_{-T}^{+T} \cos(4\pi ft + 2\theta)dt = \frac{1}{4\pi f} \int_{-T}^{+T} D[\sin(4\pi ft + 2\theta)]dt = \frac{1}{4\pi f} [\sin(4\pi ft + 2\theta)]_{-T}^{+T} =$$

$$= \frac{1}{4\pi f} [\sin(4\pi ft)\cos(2\theta) + \cos(4\pi ft)\sin(2\theta)]_{-T}^{+T} = \frac{1}{4\pi f} \left[\sin\left(4\pi \frac{1}{T} t\right)\cos(2\theta) + \cos\left(4\pi \frac{1}{T} t\right)\sin(2\theta) \right]_{-T}^{+T} = 0$$

Andando dunque a sostituire nell'espressione della potenza, abbiamo

$$P_S = \frac{A^2}{2}$$

In conclusione, quindi, è $P_S = \frac{A^2}{2}$. Avendo A un valore finito, anche la potenza del segnale ha un valore finito, per cui l'energia del segnale stesso risulta essere infinita.

Osservazione: potenza di un segnale periodico

Nell’esempio precedente abbiamo calcolato la potenza di un segnale evidentemente periodico applicando la semplice definizione. Tuttavia, si può dimostrare che, per i segnali periodici, la formula da utilizzare si può semplificare: infatti, essa diventa semplicemente

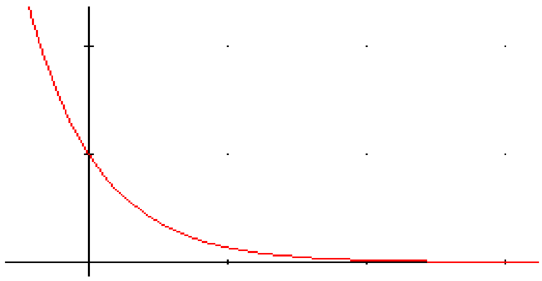
$$\boxed{P_S = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |s(t)|^2 dt}$$

dove t_0 è un istante arbitrario (per esempio 0).

Nel seguito saranno studiati a fondo i segnali periodici. Possiamo però già anticipare una osservazione confermata dall’esempio precedente: *tutti i segnali periodici sono ad energia infinita,* come è ovvio considerando la definizione stessa di energia associata ad un segnale.

ESEMPIO: SEGNALE ESPONENZIALE

Consideriamo nuovamente il segnale esponenziale $s(t) = e^{-at}$, ma, questa volta, facciamo l’ipotesi che $\begin{cases} t \in R \\ a > 0 \end{cases}$. La sua rappresentazione grafica è allora la seguente:



ossia il segnale non è più limitato al semipiano delle t positive.

Verifichiamo che si tratta di un segnale a potenza infinita, calcolando appunto P_S:

$$P_S = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left|e^{-at}\right|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} e^{-2at}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(-\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{e^{at}}\right]_{-T}^{+T}\right) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4aT}\left(\frac{1}{e^{2aT}} - e^{2aT}\right) =$$

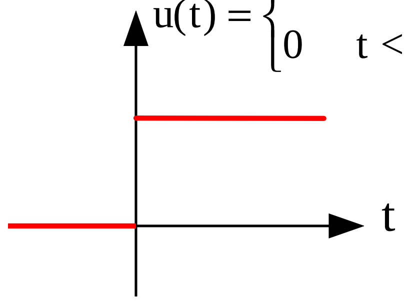
$$= \frac{1}{4a}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{Te^{2aT}} - \lim_{T\to\infty}\frac{e^{2aT}}{T}\right)$$

E’ chiaro che il primo limite tende a 0, mentre, dall’analisi, sappiamo che il secondo tende ad ∞. Quindi si tratta effettivamente di un segnale a potenza infinita.

ESEMPIO: GRADINO UNITARIO E GRADINO TRASLATO

Il cosiddetto "gradino unitario" è un segnale fatto nel modo seguente:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Esso presenta evidentemente una discontinuità nel punto t=0, in quanto per $t=0^-$ vale 0 e per $t=0^+$ vale 1. Per convenzione, si pone allora $u(t=0)=\frac{1}{2}$, con l'accortezza, però, di ricordare che comunque c'è la discontinuità.

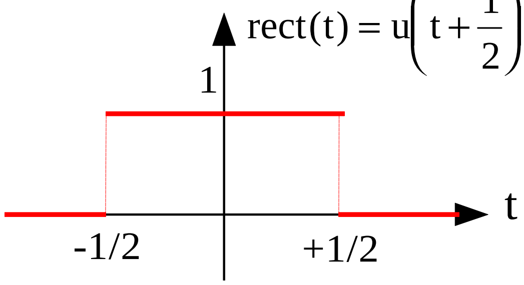
Questo segnale è chiaramente ad energia infinita. Vediamo in particolare quanto vale la sua potenza: applicando la definizione abbiamo che

$$P_S = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|s(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{0}^{+T} dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}T = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO: RETTANGOLO

La composizione di due gradini unitari traslati dà un segnale particolare, che prende il nome di "*rect*", che sta per "*rettangolo*": si tratta del segnale

$$\mathrm{rect}(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

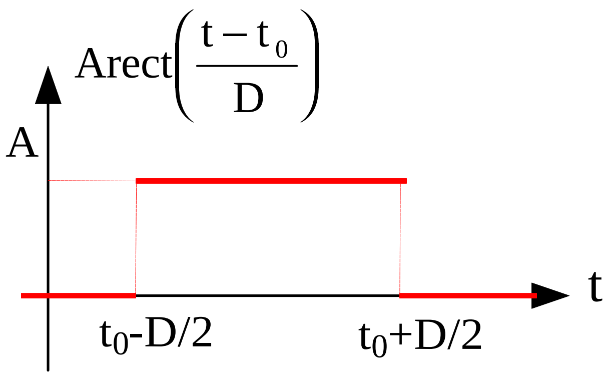


In forma analitica, possiamo dare la seguente rappresentazione di questo segnale:

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Evidentemente, si tratta di un segnale ad energia finita (e quindi a potenza nulla) pari all'area da esso sottesa.

Non è detto che il segnale debba però avere altezza unitaria (quando non vale 0), come non è detto che la base debba essere unitaria oppure che debba essere centrato in t=0. Il caso più generale che noi possiamo avere è dunque il seguente:



I parametri A e D devono soddisfare la condizione per cui l'area del rettangolo deve essere unitaria. L'espressione analitica del segnale è la seguente:

$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{D}\right)=\begin{cases} A & t_0-\frac{D}{2}<\ t<t_0+\frac{D}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservazione: utilità della funzione "rect"

La funzione "rect" risulta particolarmente importante quando, dato un segnale s(t) di andamento qualsiasi, se ne vuole conservare solo il tratto relativo ad un certo intervallo [α,β] di t. E' possibile far questo, ossia azzerare il segnale in questione al di fuori dell'intervallo prescelto, effettuando il prodotto tra s(t) ed il segnale $\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{D}\right)$, dove t_0 e D vanno scelti in modo che il rettangolo delimiti proprio l'intervallo [α,β]: deve cioè essere

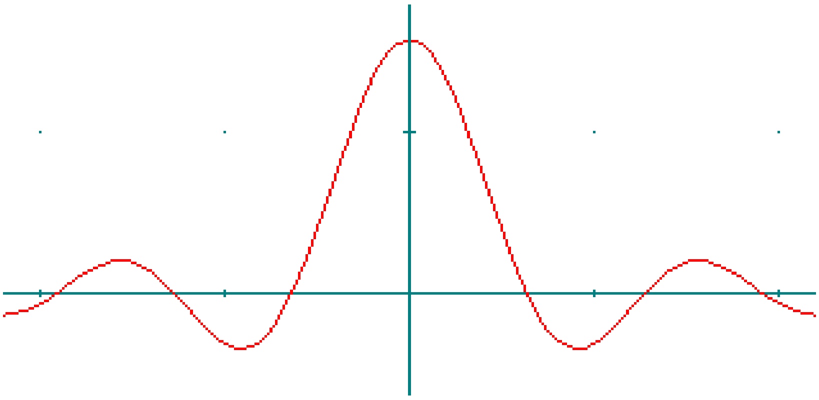
$$\alpha=t_0-\frac{D}{2}$$
$$\beta=t_0+\frac{D}{2}$$

ESEMPIO: SENO CARDINALE

La funzione "*<u>seno cardinale</u>*" di una variabile t è la funzione

$$\mathrm{sinc}(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

L'andamento qualitativo di questo segnale è il seguente:



I punti di intersezione con l'asse delle ascisse (cioè l'asse t) sono ..-3,-2,-1,+1,+2,+3,...
Una evidente proprietà di questo segnale è che

$$\lim_{t\to 0}\mathrm{sinc}(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}=1$$

Anche questo segnale può essere traslato a proprio piacimento e non è detto che abbia valore massimo 1, come nel caso precedente: per esempio, a seguito di una traslazione di un tratto t_0 positivo, la sua espressione diventa

$$s(t)=A_0\mathrm{sinc}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)=A_0\frac{\sin\left(\pi\frac{t-t_0}{T}\right)}{\left(\pi\frac{t-t_0}{T}\right)}$$

Il grafico è ovviamente analogo a prima, tranne la diversa posizione rispetto all'asse delle ordinate: i punti di intersezione con l'asse x sono questa volta .., t_0-3T, t_0-2T , t_0-T, t_0+T , t_0+2T , t_0+3T , ...

Si può dimostrare che questo segnale ha energia finita $E_S=A_0^2T$.

Prodotto di convoluzione tra due segnali

DEFINIZIONE

Consideriamo due segnali qualsiasi x(t) e y(t). Si definisce "**prodotto di convoluzione**" tra di essi il nuovo segnale z(t) così definito:

$$\boxed{z(t)=x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau}$$

<u>L'integrale che compare in questa definizione può convergere o meno</u>: nel seguito, noi ci metteremo sempre nelle ipotesi che esso converga, sottolineando, in alcuni casi, quali sono le condizioni che garantiscono la convergenza.

Questo prodotto di convoluzione gode di una serie di proprietà che spesso sono essenziali per risparmiare calcoli altrimenti complessi.

PROPRIETÀ COMMUTATIVA

Questa proprietà dice che <u>`scambiando le funzioni all’interno dell’integrale, il risulta non cambia`</u>: in termini analitici, possiamo cioè scrivere che

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau = y(t) * x(t)$$

La dimostrazione di questa proprietà consiste semplicemente nel fare un cambio di variabile nel primo o nel secondo integrale, al fine di ottenere l’altro: per esempio, se nel primo integrale poniamo t-τ=s, otteniamo

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)y(s)ds = y(t) * x(t)$$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

Questa proprietà afferma che

$$x(t) * [y(t) * h(t)] = [x(t) * y(t)] * h(t)$$

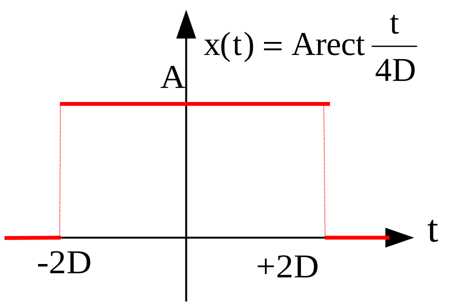
PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

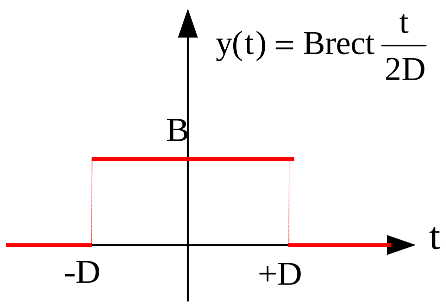
Questa proprietà afferma che

$$x(t) * [y(t) + h(t)] = [x(t) * y(t)] + [x(t) * h(t)]$$

METODO GRAFICO

Adesso vediamo come, in alcuni casi particolari, è possibile calcolare il prodotto di convoluzione tra due segnali sfruttando il loro andamento grafico. Supponiamo che i nostri segnali siano i seguenti:





La definizione ci dice che il prodotto di convoluzione è

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

ossia, in definitiva, è l’area del segnale rappresentato dal prodotto tra x(t) e y(t-τ). Il prodotto $x(t)y(t-\tau)$, per t fissato, non è altro che un segnale nella variabile τ. Allora, indicatolo con g(τ), ciò che noi vogliamo fare è vedere com’è fatto questo segnale per diversi valori di t, in modo da calcolarne l’area.

Il primo valore di t che consideriamo è evidentemente t=0: per questo valore abbiamo che

$$g(\tau)\big|_{t=0} = x(\tau)y(-\tau)$$

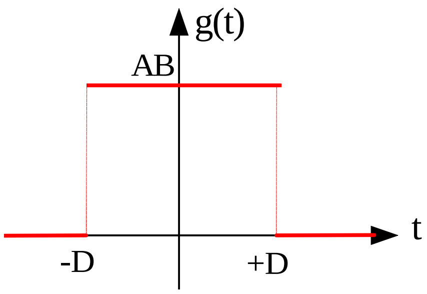
Essendo il segnale y(τ) un segnale evidentemente pari, abbiamo che y(τ)=y(-τ) e quindi che

$$g(\tau)\big|_{t=0} = x(\tau)y(\tau)$$

Quindi, per t=0, il segnale g(τ) è in ogni punto dato dal prodotto dei due segnali. Vediamo allora come è fatto:

- per τ<-D e per τ>D esso è evidentemente nullo in quanto lo è y(τ);
- invece, per -D<τ<D, abbiamo un rettangolo di altezza pari al prodotto delle altezze, ossia AB.

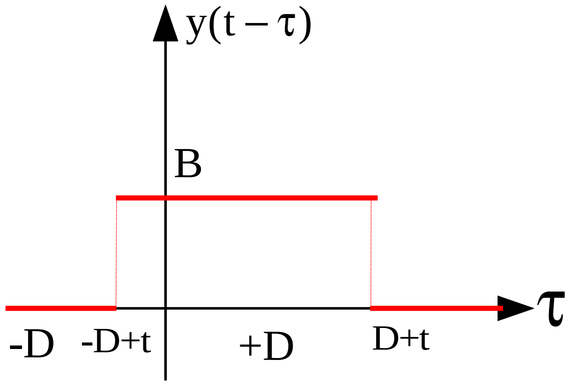
Il segnale g(τ), per t=0, è dunque il seguente:



L’area di questo segnale è evidentemente 2ABD, per cui

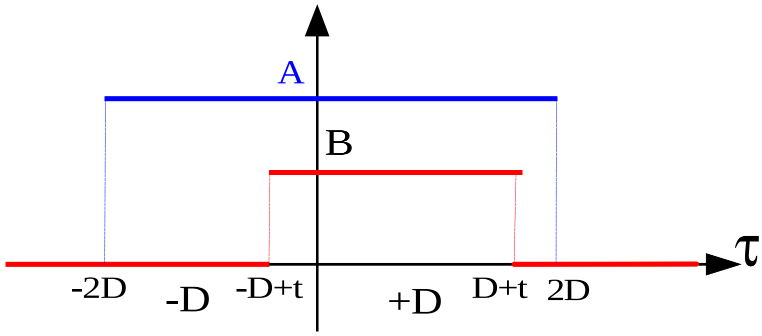
$$z(t)\big|_{t=0} = 2ABD$$

Adesso supponiamo che t abbia un generico valore t>0. Vediamo a che cosa corrisponde $g(t) = x(t)y(t-t)$. Il segnale x(τ) è quello fornito dalla traccia; invece, il segnale y(t-τ) non è altro che il segnale y(-τ), ossia sempre y(τ), traslato verso destra (se t>0) di un tratto pari a t: si tratta cioè del segnale

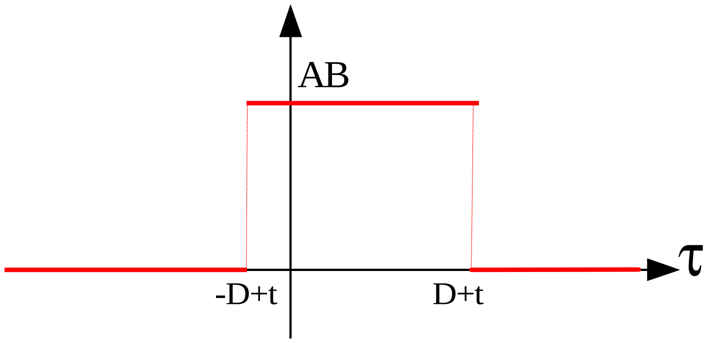


Per stabilire quanto valga prodotto x(τ)y(t-τ) dobbiamo sapere che relazione intercorre tra D e t: infatti, è chiaro che il risultato del prodotto cambia a seconda che il rettangolo più piccolo sia tutto contenuto in quello grande, solo parzialmente contenuto o del tutto esterno.

Consideriamo il primo caso, ossia



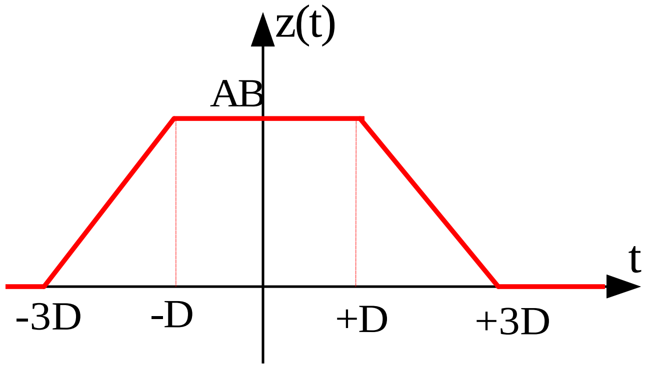
In questo caso, il prodotto è nullo quando τ<-D+t e τ>D+t, mentre è un rettangolo di altezza AB all’interno di tale intervallo: abbiamo quindi la rappresentazione



e l’area vale ancora una volta 2ABD.

Riepilogando quanto ottenuto, possiamo dunque affermare che il prodotto di convoluzione tra i due segnali considerati vale 2ABD quando t∈]-D,D[.

Il secondo caso è quello in cui il rettangolo più piccolo è solo parzialmente contenuto in quello più grande: è abbastanza evidente che, quanto più esso è esterno, tanto minore è il valore dell’area, fino ad arrivare al valore 0 quando è completamente esterno; dato che quest’ultima condizione si verifica quando t è esterno all’intervallo]-3D,+3D[, possiamo dunque concludere che il segnale z(t) sia infine il seguente:



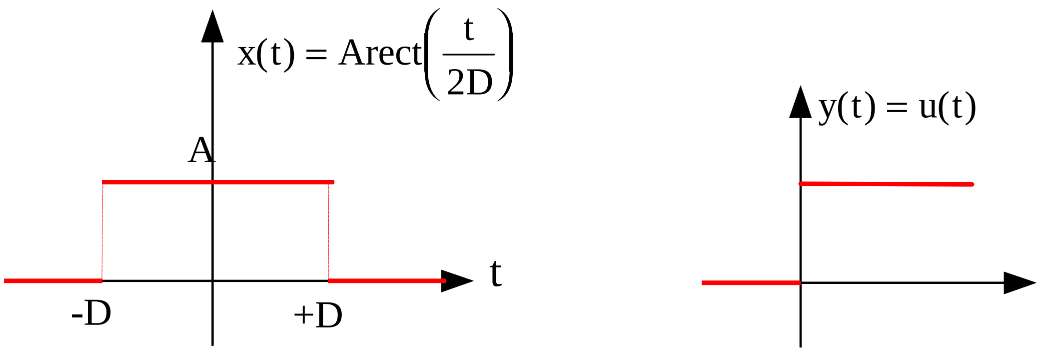
Da notare che gli estremi -3D e +3D entro i quali il segnale assume valore nullo sono pari alla somma dei rispettivi estremi dei segnali x(t) e y(t) di partenza.

Osserviamo anche che, se i due rettangoli avessero avuto la stessa base, il segnale z(t) ottenuto dalla loro convoluzione sarebbe stato un triangolo anziché un trapezio, in quanto l’unico valore di t per il quale il rettangolo più piccolo risulta tutto contenuto in quello più grande è proprio t=0, mentre per tutti gli altri valori si hanno dei punti non comuni.

Esempio

Vediamo un altro caso in cui è possibile valutare il prodotto di convoluzione tra due segnali mediante il metodo grafico appena esposto.

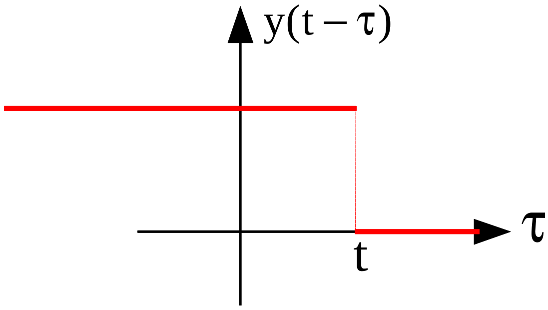
Consideriamo la convoluzione dei seguenti segnali:



Applicando la definizione, sappiamo che

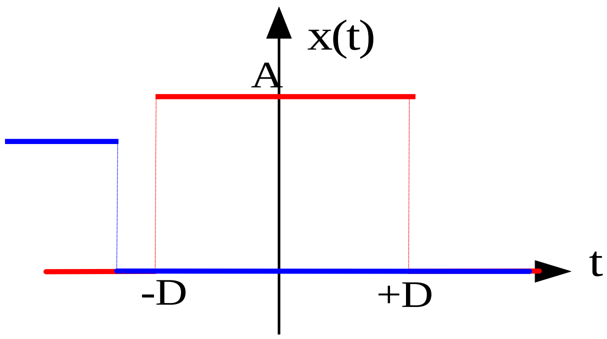
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

Vediamo anche qui come è fatto il segnale x(τ)y(t-τ) al variare di t. Intanto, mentre il segnale x(τ) è quello fornito dalla traccia, il segnale y(t-τ) è il segnale y(-τ) traslato di un tratto pari a t; dato che il segnale y(-τ) è il gradino unitario ribaltato rispetto all’asse delle ordinate, deduciamo che il segnale y(t-τ) è il seguente:



Naturalmente, la figura si riferisce al caso in cui t>0; quando, invece t<0, bisogna traslare tutto verso sinistra.

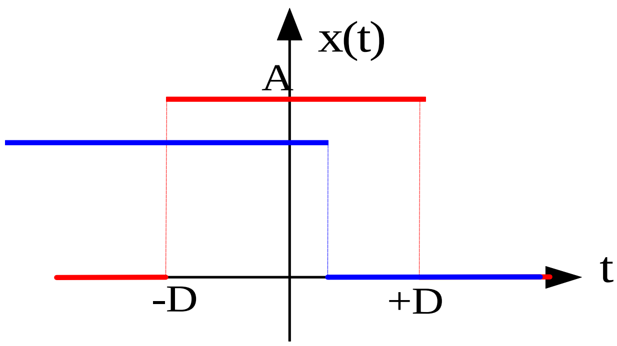
Esaminiamo allora la situazione possibili a seconda della relazione che intercorre tra t e D, ossia a seconda della posizione di y(t-τ) rispetto a x(τ): quando t<-D, la situazione è



per cui i due segnali non hanno alcun punto in comune: quindi

$$z(t)\big|_{t<-D} = 0$$

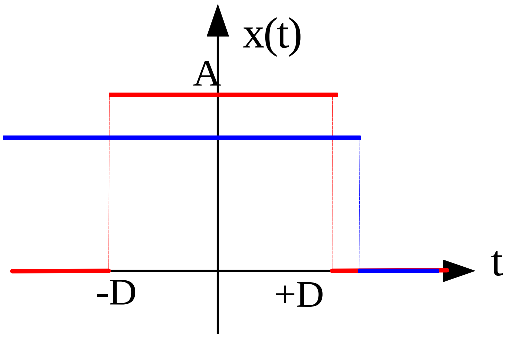
Quando -D<t<+D, abbiamo invece un'altra situazione, ossia genericamente



per cui

$$z(t) = \int_{-D}^{+t} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-D}^{+t} x(\tau)d\tau = A(t+D)$$

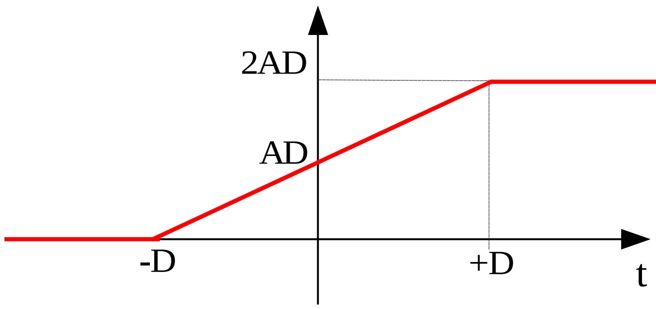
Infine, quando t>D, la situazione diventa la seguente:



per cui

$$z(t) = \int_{-D}^{+D} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-D}^{+D} x(\tau)d\tau = 2AD$$

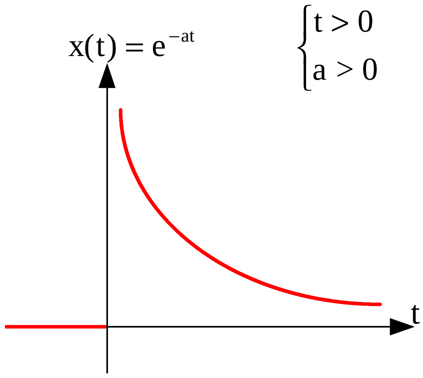
In conclusione, z(t) è fatto nel modo seguente:



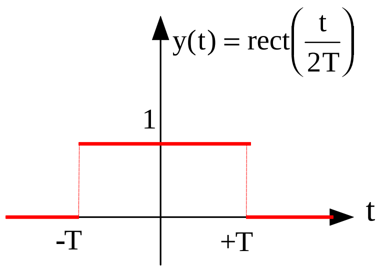
$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < -D \\ A(t+D) & -D < t < +D \\ 2AD & t > D \end{cases}$$

Esempio

Vediamo un altro esempio ancora in cui è conveniente usare il metodo grafico per il calcolo del prodotto di convoluzione tra due segnali. I due segnali in questione sono i seguenti:



$$\begin{cases} t > 0 \\ a > 0 \end{cases}$$



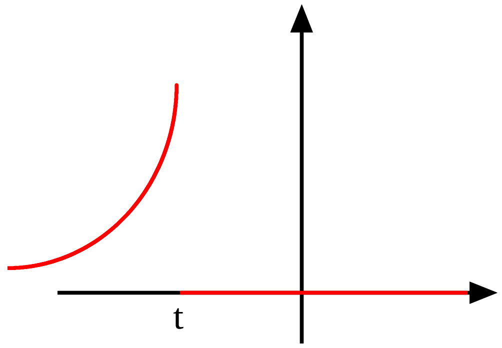
Per definizione, il prodotto di convoluzione è

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

oppure anche, scambiando le funzione all'interno dell'integrale, otteniamo

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

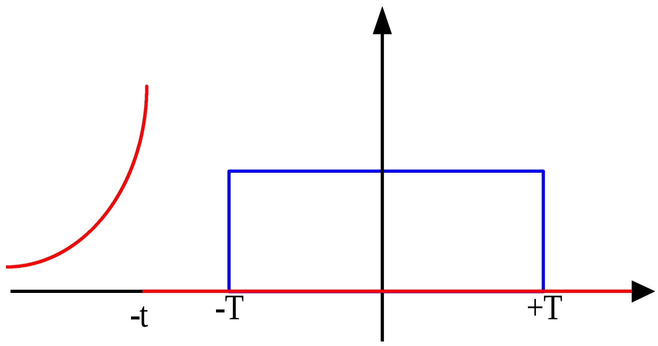
Concentriamoci sulla funzione integranda, ossia $g(\tau) = y(\tau)x(t-\tau)$. Mentre il segnale $y(\tau)$ è quello originale, il segnale x(t-τ) è il segnale x(τ) ribaltato rispetto all'asse delle ordinate e poi traslato di un tratto t , per cui ha l'andamento seguente:



(la figura si riferisce alla situazione t<0)

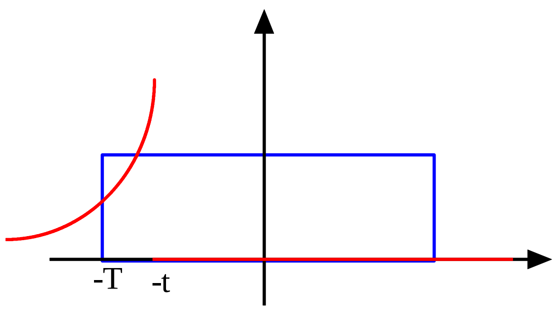
Allora, dato che y(τ) è un rettangolo , dato che g(τ) è il prodotto di tale rettangolo per x(t-τ) e dato che il prodotto di un rettangolo per un qualsiasi segnale è il segnale stesso limitato però all'intervallo di definizione del rettangolo, deduciamo che il segnale g(τ) ha un andamento diverso a seconda di quale relazione intercorre tra t e T. Esaminiamo i casi possibili:

1. il primo caso è quello in cui prendiamo t tale che $-t < -T$, ossia $t > T$: in questo caso la disposizione dei due segnali è

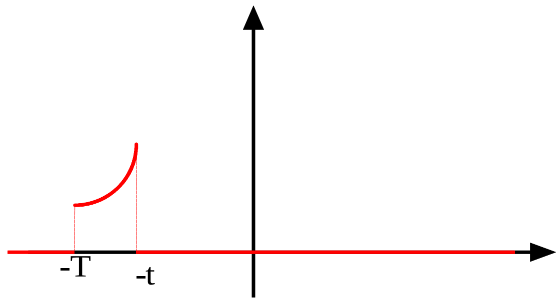


e quindi g(τ)=0 in quanto, nell'intervallo [-T,+T] il segnale x(t-τ) vale 0; di conseguenza, anche il prodotto di convoluzione, che è l'area sottesa dal segnale g(τ) non può che valere 0;

2. il secondo caso è quello in cui prendiamo t tale che $-T < -t < +T$, ossia $-T < t < T$: in questo caso la disposizione dei segnali x(t-τ) e y(τ) è



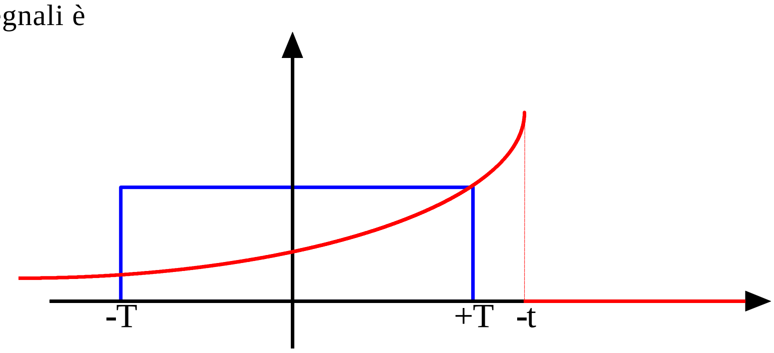
per cui il segnale g(τ) è il seguente:



In questo caso si ha allora che

$$z(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-T}^{+t} x(t-\tau)d\tau=\int_{-T}^{+t} e^{-a(t-\tau)}d\tau=e^{-at}\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_{-T}^{t}$$

3. L'ultimo caso è quello in cui prendiamo t tale che $-t>T$, ossia che $t<-T$: in questo caso, la disposizione dei due segnali è



e quindi la situazione è analoga al caso precedente, con la differenza che cambiano gli estremi di integrazione: si ha infatti che

$$z(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-T}^{+T} x(t-\tau)d\tau=\int_{-T}^{+T} e^{-a(t-\tau)}d\tau=e^{-at}\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_{-T}^{T}$$

Riepilogando, il segnale z(t), dato dalla convoluzione di x(t) e y(t), è il seguente:

$$z(t)=\begin{cases} e^{-at}\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_{-T}^{T} & \text{per } t<-T \\ e^{-at}\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_{-T}^{t} & \text{per } -T<t<+T \\ 0 & \text{per } t>+T \end{cases}$$

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE TRA SEGNALI PERIODICI

Consideriamo due segnali x(t) e y(t) e supponiamo che uno dei due o entrambi siano periodici con lo stesso periodo T: in questo caso, se applichiamo la definizione di convoluzione usata fino ad ora, ossia

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

ne viene fuori un integrale divergente.

Allora, in questi casi particolari, si definisce un nuovo tipo di convoluzione, che prende il nome di "**convoluzione ciclo-stazionaria**": la definizione è

$$\boxed{z(t) = x(t) * y(t) = \int_{t_0}^{t_0+D} x(\tau) y(t-\tau) d\tau}$$

La differenza con l'altra definizione sta evidentemente nel fatto che l'integrazione viene ristretta ad un intervallo qualsiasi, finito e di ampiezza pari al periodo T. Ciò che si trova è <u>che quell'integrale converge per ogni t e che anche il suo risultato, ossia il segnale z(t), è periodico di periodo T</u>.

Segnali discreti

INTRODUZIONE E PRINCIPALI DEFINIZIONI

Un "**segnale discreto**" è per definizione una funzione i cui valori non dipendono in modo continuo dalla variabile indipendente, come nel caso dei segnali s(t) visti prima; al contrario un segnale discreto è una funzione i cui valori sono calcolati in multipli interi di una quantità fissa, solitamente indicata con T.

Quindi, un segnale discreto si indica generalmente con la notazione $s(nT)$, dove n è ovviamente un numero intero e dove T (numero reale positivo) talvolta viene anche omesso.

Anche per questi segnali sussistono definizioni e proprietà analoghe a quelle viste per i segnali continui. Per esempio, così come noi definivamo l'energia di un segnale s(t) continuo mediante la relazione

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

allo stesso modo definiamo "**energia**" di un segnale discreto la quantità

$$\boxed{E_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T|s(nT)|^2}$$

Anche in questo caso, la sommatoria può convergere o meno a seconda delle caratteristiche di s(nT): allora noi diremo che *s(nT) è un "**segnale (discreto) ad energia finita**" o semplicemente un "segnale di energia" se quella sommatoria converge, ossia se E_S risulta essere un numero reale (ovviamente positivo).*

Si definisce invece "**potenza**" di un segnale discreto la quantità

$$\boxed{P_S = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{n=-N}^{+N} T|s(nT)|^2}$$

Anche qui si nota la analogia con il caso continuo, quando cioè la formula era

$$P_S = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |s(t)|^2 dt$$

Inoltre, anche la convergenza di questa seconda sommatoria non è garantita: noi diremo perciò che *s(nT) è un "**segnale (discreto) a potenza finita**" o semplicemente un "segnale di potenza" se essa converge e se il limite del suo valore risulta essere un valore reale non nullo.*

Ancora, le due definizioni appena date sono strettamente legate dai seguenti due risultati

- se s(nT) è un segnale di energia, ossia se $E_S \in]0,+\infty[\ \rightarrow P_S=0$, ossia s(nT) non è un segnale di potenza
- se s(nT) è un segnale di potenza, ossia se $P_S \in]0,+\infty[\ \rightarrow E_S=\infty$, ossia s(nT) non è un segnale di energia

Un'altra definizione valida per i segnali discreti è la seguente: si definisce "**valor medio**" del segnale discreto s(nT) la quantità

$$m_S = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{n=-N}^{+N} Ts(nT)$$

ESEMPIO: GRADINO UNITARIO DISCRETO

Come primo esempio di segnale discreto consideriamo il seguente:

$$u(nT) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Si tratta dunque del segnale che dà il valore 1 ogni multiplo della quantità T. Verifichiamo che si tratta di un segnale a potenza finita (e quindi ad energia infinita): applicando la definizione abbiamo intanto che

$$P_S = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{n=-N}^{+N} T|u(nT)|^2$$

Tenendo conto che si tratta di un segnale reale, per cui il modulo quadro è semplicemente il quadrato, possiamo scrivere che

$$P_S = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{n=0}^{+N} Tu^2(nT)$$

Il segnale ha valore 1 nei multipli di T, per cui

$$P_S = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{n=0}^{+N} T = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T} T \sum_{n=-N}^{+N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{(N+1)T}{(2N+1)T} = \lim_{N\to\infty} \frac{(N+1)}{(2N+1)} = \frac{1}{2}$$

Facciamo osservare una perfetta analogia tra questo segnale ed il suo corrispondente segnale continuo, ossia il gradino unitario u(t): anche in quel caso si trovava $P_S=1/2$.

ESEMPIO: ESPONENZIALE DISCRETO

Consideriamo adesso il nuovo segnale discreto

$$s(nT) = a^n u(nT) \qquad |a| < 1$$

Questo segnale, data la struttura di u(nT) vista nell'esempio precedente, si può scrivere nel modo seguente:

$$s(nT) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Vediamo quanto vale la sua energia: applicando la definizione abbiamo che

$$E_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T|s(nT)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} T|a^n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} T|a|^{2n} = T\sum_{n=0}^{+\infty} \left(|a|^2\right)^n$$

La sommatoria che viene fuori non è altro che la somma della serie geometrica, per cui

$$E_S = \frac{T}{1-|a|^2}$$

Quello ottenuto è un valore finito, per cui si tratta di un segnale ad energia (e a potenza infinita).

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE PER SEGNALI DISCRETI

La definizione di prodotto di convoluzione tra due segnali discreti è ancora una volta analoga al caso di quelli continui: se x(nT) e y(nT) sono due segnali discreti, il loro prodotto di convoluzione è il segnale discreto definito come

$$\boxed{z(nT) = x(nT) * y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Tx(nT)y(nT-kT)}$$

Abbiamo cioè, rispetto al caso continuo, una sommatoria al posto dell'integrale ed il termine T al posto del termine dt.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1