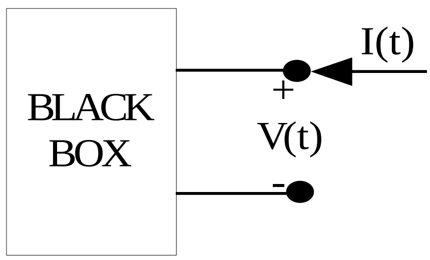
Appunti di Elettrotecnica
Analisi in regime sinusoidale (parte IV)

ANGOLO DI SFASAMENTO

Supponiamo di avere un generico circuito monoporta che rappresentiamo mediante la tradizionale “black box”:



Supponiamo anche che il circuito stia lavorando in regime sinusoidale, il che significa che tutte le correnti e le tensioni di lato, insieme alla corrente ed alla tensione alla porta del circuito, sono sinusoidali; supponiamo allora che queste due ultime grandezze risultino avere le seguenti forme d’onda:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_V) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\bar{V}e^{j\omega t}\right]$$
$$v(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha_I) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\bar{I}e^{j\omega t}\right]$$

Si definisce allora “**angolo di sfasamento**” tra tensione e corrente la quantità

$$\boxed{\varphi = \alpha_V - \alpha_I}$$

Nel caso in cui venga preso il fasore della tensione come riferimento, è ovvio che α_V=0, per cui

$$\varphi = -\alpha_I$$

ed è quindi possibile esprimere la tensione e la corrente nella forma

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$
$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)$$

In termini di fasori abbiamo che

$$\overline{V} = V\langle\alpha_V = \frac{V_M}{\sqrt{2}}\langle 0°$$
$$\overline{I} = I\langle\alpha_I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}\langle -\varphi$$

per cui l’impedenza d’ingresso del nostro circuito è

$$\boxed{\dot{z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V}{I}\langle\varphi}$$

Quest’ultima relazione mette in evidenza che *’angolo di sfasamento è, per definizione, l’argomento della impedenza d’ingresso del circuito.*

L’importanza di questo angolo sarà chiara nei discorsi che faremo tra poco.

POTENZA ATTIVA ISTANTANEA E POTENZA REATTIVA ISTANTANEA

Consideriamo il generico circuito monoporta e supponiamo che la corrente (a regime) e la tensione alla porta del circuito abbiano le seguenti forme d’onda:

$$V(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_V)$$
$$I(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha_I)$$

In base a quanto visto circa l’angolo di sfasamento, possiamo prendere il fasore della tensione come riferimento (α_V=0)cui possiamo esprimere quelle stesse due forme d’onda nel modo seguente:

$$V(t) = V_M \cos(\omega t)$$
$$I(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)$$

Soffermiamoci in particolare sulla corrente: sviluppando il coseno mediante le formule di duplicazione, abbiamo che

$$i(t) = \underbrace{I_M \cos \omega t \cos \varphi}_{i_A(t)} + \underbrace{I_M \sin \omega t \sin \varphi}_{i_R(t)}$$

Sussistono allora le seguenti due definizioni:

- il termine $i_A(t) = I_M \cos(\omega t)\cos\varphi$ prende il nome di **componente ATTIVA** della corrente istantanea,

- il termine $I_R(t) = I_M \sin(\omega t)\sin\varphi$ rende invece il nome di **componente REATTIVA** della corrente istantanea.

Possiamo dunque scrivere la corrente che fluisce alla porta del circuito nella forma

$$\boxed{i(t) = i_A(t) + i_R(t)}$$

Dalle espressioni dei due termini possiamo subito osservare che *la componente attiva della corrente è in fase con la tensione, mentre quella reattiva, essendo presente la funzione sen(wt) al posto della funzione cos(wt), è sfasata di 90° in ritardo.*

Sappiamo inoltre che si definisce **potenza istantanea** in ingresso al circuito (o assorbita dal circuito) il termine

$$p(t) = v(t)i(t)$$

ossia il prodotto della corrente istantanea per la tensione istantanea.

Se sostituiamo l'espressione prima trovata per la corrente, otteniamo evidentemente

$$\boxed{p(t) = p_A(t) + p_R(t) = v(t)i_A(t) + v(t)i_R(t)}$$

dove, ovviamente, $p_A(t)$ è la **potenza attiva istantanea** mentre $p_R(t)$ è la **potenza reattiva istantanea**.

Sostituendo ancora le rispettive espressioni della componente attiva e reattiva della corrente istantanea troviamo anche che

$$p_A(t) = v(t)I_M \cos\omega t \cos\varphi$$
$$p_R(t) = v(t)I_M \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\varphi$$

Sostituendo adesso la forma d'onda della tensione, abbiamo che

$$p_A(t) = V_M I_M \cos^2(\omega t)\cos\varphi$$
$$p_R(t) = V_M I_M \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin\varphi = \frac{V_M I_M}{2}\sin\varphi\sin(2\omega t)$$

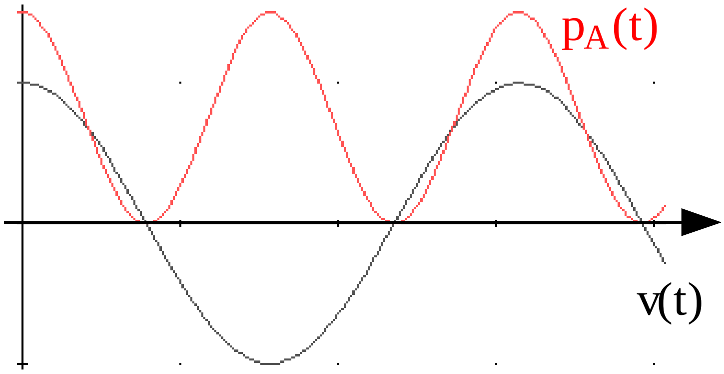
In conclusione, quindi, abbiamo trovato che

$$\boxed{\begin{aligned} p_A(t) &= V_M I_M \cos^2(\omega t)\cos\varphi \\ p_R(t) &= \frac{V_M I_M}{2}\sin\varphi\sin(2\omega t) \end{aligned}}$$

Analizziamo allora queste espressioni: la prima cosa che si osserva è che sia la potenza attiva sia la potenza reattiva sono delle sinusoidi a pulsazione 2ω doppia rispetto alla pulsazione della tensione di alimentazione. Ciò che a noi interessa studiare di queste sinusoidi è il segno che i loro valori assumono in ciascun istante.

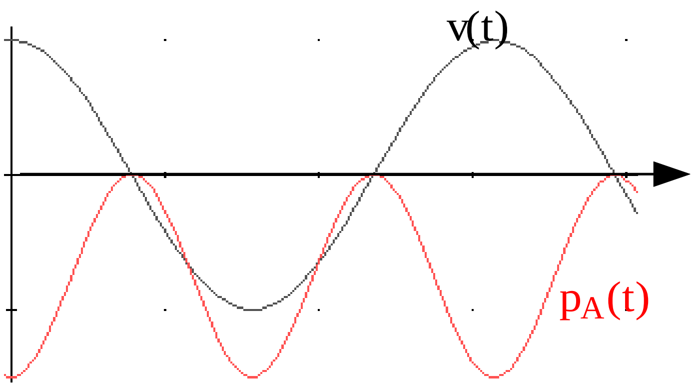
Cominciamo dalla potenza attiva: è evidente che, fissato un certo istante t, la potenza attiva in tale istante sarà positiva o negativa a seconda del valore dell’angolo di sfasamento φ; i casi possibili sono ovviamente solo due:

- se cosφ>0 , ossia -π/2<φ<π/2 → **p_A(t)>0** : l’andamento temporale della potenza attiva è, in questo caso, del tipo seguente:



Fisicamente, questo andamento indica che la potenza attiva corrisponde ad un flusso UNIDIREZIONALE di energia, ossia che, in ogni istante, l’energia associata alla potenza istantanea attiva è fornita al circuito senza mai “rifluire” dal circuito stesso verso l’esterno; in altre parole, questa energia, una volta assorbita dal circuito, non può essere più restituita;

- se cosφ<0, ossia π/2<φ<3π/2 → **p_A(t)<0** : in questo caso, l’andamento temporale di pA(t) è del tipo seguente:



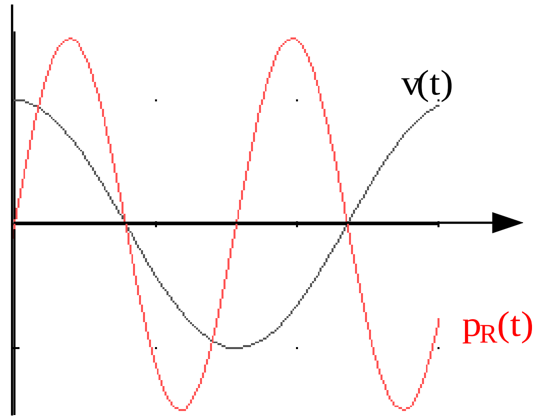
Abbiamo cioè sempre di un flusso UNIDIREZIONALE, ma, questa volta, si tratta di una potenza che esce definitivamente dal circuito.

Possiamo dunque affermare che *la potenza attiva rappresenta SEMPRE un flusso unidirezionale di energia, che entra nel circuito quando cosj>0 o che esce quando cosj<0.*

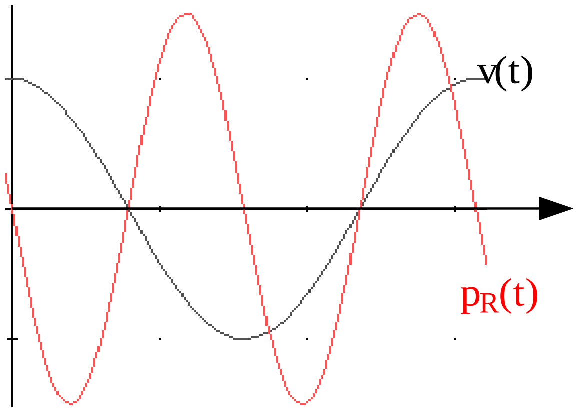
Passiamo alla potenza reattiva, il cui segno dipende da 2 termini: un termine è $\sin j$ ed il suo valore dipende ancora una volta dall’angolo di sfasamento; l’altro termine è $\sin(2wt)$ e questa è una sinusoide che oscilla attorno al valore medio 0: questo comporta che *una volta fissato il valore di j, la potenza reattiva istantanea, al contrario di quella attiva, alterni intervalli in cui è positiva (il che indica un flusso di energia dall’esterno verso il circuito) a intervalli* *uguali in cui è invece negativa (il che indica un flusso di energia dal circuito verso l'esterno).*

Da un punto di vista grafico, i casi possibili sono ancora una volta due:

- quando $\sin\varphi>0$, abbiamo un andamento del tipo seguente:



- quando, invece, $\sin\varphi<0$, l'andamento è del tipo seguente:



In entrambi i casi, come detto, la potenza reattiva oscilla attorno al valore medio 0, per cui diciamo che *l'energia associata alla potenza reattiva istantanea fluisce alternativamente dal circuito verso l'esterno e viceversa ed in egual misura nei due sensi.*

La conseguenza fondamentale di questo fatto è che, al termine di un qualsiasi numero intero di semiperiodi (riferiti alla frequenza di alimentazione), risulta nulla l'energia associata alla potenza reattiva complessivamente scambiata dal circuito attraverso la porta in esame.

POTENZA ATTIVA

Al fine di studiare a fondo i fenomeni energetici associati a circuiti in regime sinusoidale e relativi ad intervalli di tempo sufficientemente lunghi, è opportune introdurre altre grandezze, ovviamente non più istantanee.

Consideriamo sempre la potenza istantanea in ingresso al circuito $p(t)=v(t)i(t)$: si definisce **potenza media** o anche **potenza reale** o anche **potenza attiva** assorbita dal circuito monoporta (da non confondere con la potenza attiva istantanea) la quantità

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt}$$

ossia il valor medio in un periodo della potenza istantanea. Se sostituiamo a p(t) la somma della potenza attiva e di quella reattiva abbiamo che

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p_A(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T p_R(t)dt$$

Avendo detto che lo scambio di energia associato alla potenza reattiva è complessivamente nullo nell'arco di un intero periodo T, possiamo scrivere semplicemente che

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p_A(t)dt$$

dal che si deduce che *la potenza attiva può anche intendersi come valore medio in un periodo della potenza istantanea attiva.*

Sostituendo adesso l'espressione della potenza attiva abbiamo

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T V_M I_M \cos^2(\omega t)\cos\varphi dt = \frac{1}{T}V_M I_M \cos\varphi \int_0^T \cos^2(\omega t)dt$$

Il valore medio della funzione $\mathrm{Cos}^2 x$ è 1/2, per cui

$$P = \frac{V_M I_M}{2}\cos\varphi$$

Ricordandoci della relazione che lega l'ampiezza di una grandezza sinusoidale al suo valore efficace, quella relazione diventa infine

$$\boxed{P = IV\cos\varphi}$$

La potenza attiva assorbita ($\cos\varphi>0$) o ceduta ($\cos\varphi<0$) da un circuito è dunque proporzionale non solo ai valori efficaci della tensione (V) e della corrente (I) alla porta del circuito, ma anche al coseno dell'angolo di sfasamento, che prende perciò il nome di **fattore di potenza.**

Questo è un fatto che si rivelerà importante quando cercheremo di trovare dei modi per ridurre il valore della corrente, mantenendo però costante la potenza media.

L'importanza della potenza attiva in campo ingegneristico sta proprio nel suo significato di valor medio della potenza attiva istantanea in un periodo T: generalmente, si è interessati a conoscere l'energia assorbita o ceduta da un circuito in intervalli di tempo molto grandi rispetto al periodo T (che spesso vale 0.02 secondi in quanto la frequenza è pari a 50Hz); questa energia assorbita o ceduta è legata al valore della potenza attiva istantanea, che, come detto, corrisponde ad una energia che fluisce verso il circuito (quando la potenza è positiva) oppure che viene ceduta dal circuito stesso (quando la potenza è negativa); allora, per conoscere la quantità di energia scambiata dal circuito in un intervallo di tempo Δt, è sufficiente moltiplicare la potenza attiva P per l'intervallo di tempo Δt

considerato; anche se si tratta di una approssimazione nel caso che Δt non sia un multiplo intero di T, si ottiene un valore comunque valido.

Ricordiamo infine che la potenza attiva si misura in watt.

POTENZA REATTIVA

Si definisce **potenza reattiva Q** assorbita da un circuito monoporta (da non confondere con la potenza reattiva istantanea) il valore massimo della potenza reattiva istantanea: dato che quest'ultima vale

$$p_R(t) = \frac{V_M I_M}{2} \sin\varphi \sin(2\omega t)$$

è ovvio che, fissato il valore di φ, il suo valore massimo si ha quando il termine $\sin(2\omega t)$ vale 1, per cui

$$\boxed{Q = \frac{V_M I_M}{2} \sin\varphi = VI\sin\varphi}$$

L'importanza della potenza reattiva sta nel fatto che essa serve a rappresentare l'entità degli scambi energetici associati alla potenza reattiva istantanea; anche se abbiamo visto come questi scambi non implichino un trasferimento definitivo di energia da o verso il circuito, devono tuttavia essere considerati per alcune loro conseguenze che esamineremo tra poco (in particolare le operazioni di rifasamento).

La potenza reattiva si misura in VAR.

POTENZA COMPLESSA E POTENZA APPARENTE

Si definisce **potenza complessa** il fasore

$$\boxed{\overline{N} = \overline{V}\,\overline{I}^*}$$

ossia il prodotto tra il fasore associato alla tensione di alimentazione ed il fasore coniugato del fasore associato alla corrente assorbita.

Facciamo qualche calcolo per vedere meglio quanto vale questo fasore: nell'ipotesi di avere preso nulla la fase della tensione (al fine di usarla come riferimento) abbiamo che

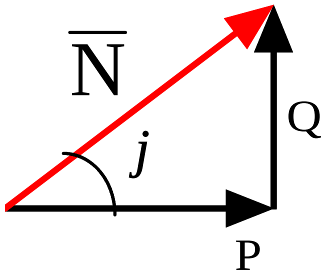
$$\overline{N} = \overline{V}\overline{I}^* = V\angle 0^\circ (I\angle -\varphi)^* = V\angle 0^\circ (I\angle \varphi) = VI\angle \varphi = VI\cos\varphi + jVI\sin\varphi = P + jQ$$

In conclusione, quindi, si ha che

$$\boxed{\overline{N} = P + jQ}$$

Questa relazione dice dunque che *la potenza complessa è quel fasore avente come parte reale la potenza attiva e come coefficiente della parte immaginaria la potenza reattiva.*

Rappresentando la potenza complessa nel piano di Gauss, abbiamo quanto segue:



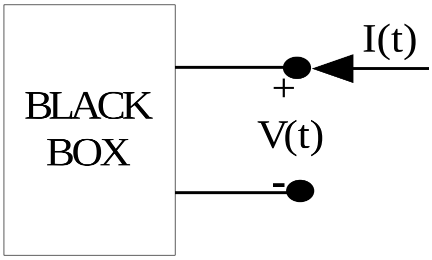
L’angolo tra la potenza complessa e quella attiva è ancora una volta pari all’angolo di sfasamento.

Si definisce inoltre **potenza apparente** (e si misura in Volt*Ampere) il modulo della potenza complessa, ossia

$$\boxed{N = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

SIGNIFICATO FISICO DELLE GRANDEZZE ENERGETICHE INTRODOTTE

Consideriamo il solito generico circuito monoporta:



Esso è caratterizzato da una impedenza d’ingresso $\dot{z} = R + jX$, dove R è la resistenza dell’impedenza e X la reattanza dell’impedenza. Sappiamo che l’impedenza ci consente di collegare la tensione e la corrente alla porta del circuito mediante la relazione $\bar{V} = \dot{z}\bar{I}$.

Calcoliamo allora la potenza complessa applicando semplicemente la definizione:

$$\bar{N} = \bar{V}\bar{I}^* = (\dot{z}\bar{I})\bar{I}^* = \dot{z}I^2 = \left(R + jX\right)I^2 = RI^2 + jXI^2$$

Ricordando che la parte reale della potenza complessa è la potenza attiva P, mentre il coefficiente della parte immaginaria è la potenza reattiva R, deduciamo che

$$\boxed{\begin{cases} P = RI^2 \\ Q = XI^2 \end{cases}}$$

Queste due relazioni ci dicono quanto segue:

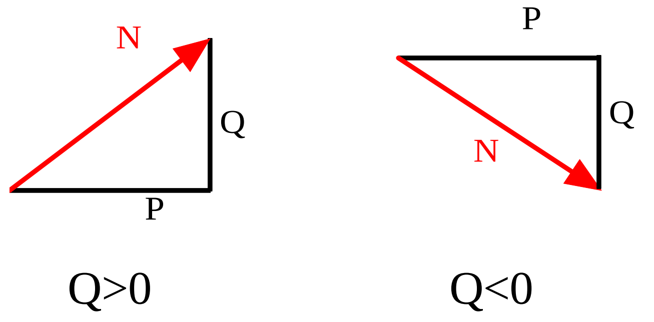
- intanto, *la potenza attiva assorbita da una impedenza dipende SOLO dalla resistenza R (parte reale dell’impedenza),* ossia dall’unico componente in grado di assorbire definitivamente l’energia senza poi doverla restituire; quindi, la potenza attiva P corrisponde alla energia dissipata nei resistori nel circuito, il che spiega perché essa corrisponda ad un flusso di energia che non può essere restituita dal circuito una volta che è stata assorbita;

- inoltre, dalla seconda relazione si osserva che *la potenza reattiva, in quanto indice di un fenomeno di "flusso e riflusso" di energia, risulta dipendente dalla reattanza,* ossia da quei componenti del circuito che sono in grado di immagazzinare energia (induttori e condensatori) e poi di restituirla seguendo le alternanze della corrente; quindi la potenza reattiva Q corrisponde alla energia conservata in condensatori ed induttori.

Possiamo osservare anche un'altra cosa: al contrario della resistenza all'impedenza R, che è comunque positiva, la reattanza X è affetta da segno, per cui lo è anche Q; ricordandoci allora che, in generale, la reattanza vale $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$, deduciamo che i casi sono due:

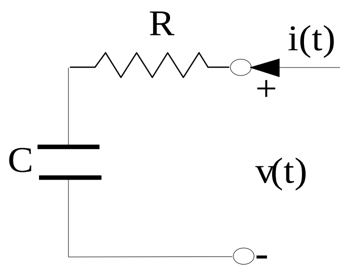
- se **C=0** (e quindi φ>0), ossia non ci sono condensatori ed il circuito è **ohmico-induttivo** (corrente in ritardo sulla tensione), X>0 e quindi Q>0;
- se **L=0** (e quindi φ<0), ossia mancano gli induttori ed il circuito è **ohmico-capacitivo** (corrente in anticipo sulla tensione), X<0 e quindi Q<0.

Si possono allora tracciare, per questi due casi, i cosiddetti **triangoli delle potenze**:



Esempio: circuito RC serie

Sia dato il circuito seguente:



$$v(t) = 60\sqrt{2}\cos(1000t)$$
$$R = 2 * 10^3 (ohm)$$
$$C = 10^{-6} (F)$$

Calcolare le potenze in gioco nel circuito.

Risoluzione

Le potenze in gioco in un circuito come questo sono 2:

- la potenza attiva associata al resistore, che vale $P = RI^2$, dove I è il valore efficace della corrente che attraversa il resistore;

- la potenza reattiva associata al condensatore, che vale $Q = X_C I^2$, dove I è il valore efficace della corrente che attraversa il condensatore, mentre $X_C = -1/wC$ è la reattanza associata al condensatore stesso.

Queste due potenze P e Q servono a definire la potenza complessa $\overline{N} = P + jQ$ disponibile alla porta del circuito.
Per calcolare P e Q dobbiamo evidentemente valutare il valore efficace della corrente che scorre nel circuito.
L'impedenza complessiva del circuito è

$$\dot{z} = R - j\frac{1}{wC} = 2*10^3 - j10^3 = \sqrt{5*10^6}\left\langle \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) = 10^3\sqrt{5}\langle -26.56° \right.$$

per cui, essendo $\overline{V} = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\langle 0° = 60\langle 0°$, il fasore associato alla tensione di alimentazione, possiamo scrivere che il fasore associato alla corrente è

$$\bar{I} = \frac{\overline{V}}{\dot{z}} = \frac{60\langle 0°}{10^3\sqrt{5}\langle -26.56°} = 0.027\langle 26.56°$$

Il valore efficace della corrente è dunque di 0.027(A) ed esso ci permette di calcolare le potenze:

- la potenza attiva associata al resistore vale $P = RI^2 = 1.45(W)$
- la potenza reattiva associata al condensatore vale invece $Q = -X_C I^2 = -0.73(VAR)$.

Di conseguenza, la potenza complessa vale $\overline{N} = 1.45 - j0.73 \quad (VA)$.
Facciamo inoltre osservare che, anziché usare le formule

$$\begin{cases} P = RI^2 \\ Q = XI^2 \end{cases}$$

per il calcolo della potenza attiva e di quella reattiva, potevamo anche usare le formule

$$\begin{cases} P = VI\cos\varphi \\ Q = VI\sin\varphi \end{cases}$$

dove sappiamo che l'angolo di sfasamento φ è l'argomento dell'impedenza del circuito, ossia $-26.56°$. Allora, una volta fatti i calcoli con il primo metodo, possiamo verificare la correttezza dei risultati ottenuti mediante il secondo metodo: effettuando questa verifica, abbiamo che

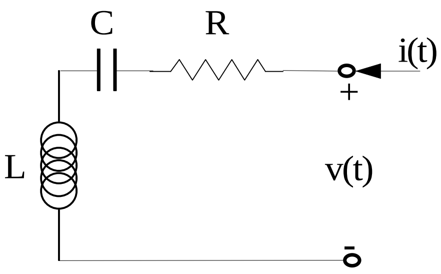
$$\begin{cases} P = VI\cos\varphi = 60*0.027*\cos(-26.56°) = 1.45(W) \\ Q = VI\sin\varphi = 60*0.027*\sin(-26.56°) = -0.73(VAR) \end{cases}$$

ossia gli stessi valori trovati prima.

Facciamo inoltre osservare che la potenza reattiva è risultata negativa in quanto è associata ad un condensatore. Se ci fosse stato anche un induttore, essa sarebbe potuta essere anche positiva: questo per dire che ***il segno di Q serve ad individuare la natura del circuito:*** quando Q>0, il circuito è di natura induttiva (nel senso che la reattanza induttiva X_L prevale su quella capacitiva X_C), mentre, quando Q<0, il circuito è di natura capacitiva (nel senso che la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva).

Esempio: circuito RLC serie

Sia dato il circuito seguente:



$$\overline{V}=200$$
$$R=100(ohm)$$
$$X_L=150(H)$$
$$X_C=200(F)$$

Determinare le potenze in gioco nel circuito.

Risoluzione

Il discorso è evidentemente identico a quello dell'esempio precedente, con la differenza che in questo caso è presente anche una reattanza induttiva non nulla. Di conseguenza, le potenze in gioco sono le seguenti:

- la potenza attiva associata al resistore, che vale $P=RI^2$, dove I è il valore efficace della corrente che attraversa il resistore;
- la potenza reattiva associata al condensatore, che vale $Q_C=X_CI^2$, dove $X_C=-1/wC$ è la reattanza associata al condensatore stesso;
- la potenza reattiva associata all'induttore, che vale $Q_L=X_LI^2$, dove $X_L=wL$ è la reattanza associata all'induttore stesso.

Ovviamente, la somma $Q=Q_C+Q_L$ costituisce la potenza reattiva complessiva in gioco nel circuito mentre la quantità $\overline{N}=P+jQ$ rappresenta la potenza complessa totale disponibile alla porta del circuito.

Anche in questo caso, per calcolare P,Q_C e Q_L abbiamo bisogno di conoscere quanto vale il valore efficace della corrente che scorre nel circuito: l'impedenza complessiva del circuito, somma delle tre impedenze, è

$$\dot{z}=R+j(X_L-X_C)=100-j50=\sqrt{10^4+2500}\langle \text{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)=111.8\langle -26.6°$$

e, quindi, il fasore associato alla corrente risulta essere

$$\overline{I}=\frac{\overline{V}}{\dot{z}}=\frac{200}{111.8}\langle +26.6°=1.789\langle +26.6°$$

Abbiamo dunque un valore efficace di corrente pari a 1.789(A); siamo adesso in grado di calcolarci le tre potenze:

- potenza attiva associata al resistore: $P=RI^2=320(W)$;
- potenza reattiva associata al condensatore: $Q_C=-X_CI^2=-640.8(VAR)$;
- potenza reattiva associata all'induttore: $Q_L=X_LI^2=480.6(VAR)$.

La potenza reattiva complessiva è dunque $Q=Q_C+Q_L=-160.2(VAR)$ e risulta negativa in accordo al fatto che la reattanza capacitiva è maggiore di quella induttiva. La potenza complessa risulta invece essere $\overline{N}=320-j160.2\quad(VA)$.

Anche in questo caso, verifichiamo la bontà dei risultati ottenuti applicando le formule

$$\begin{cases} P = VI\cos\varphi \\ Q = VI\sin\varphi \end{cases}$$

Tenendo conto che l'angolo di sfasamento φ è l'argomento dell'impedenza del circuito, ossia $-26.6°$, abbiamo quanto segue:

$$\begin{cases} P = VI\cos\varphi = 200 * 1.789 * \cos(-26.56°) = 320(W) \\ Q = VI\sin\varphi = 200 * 1.789 * \sin(-26.56°) = -160.2(VAR) \end{cases}$$

Si tratta degli stessi valori trovati prima, per cui i nostri calcoli sono esatti.

TEOREMA DI THELLEGEN IN TERMINI DI FASORI

Il teorema di Thellegen in termini scalari afferma che

$$\sum_{k=1}^{b} V_k I_k = 0$$

dove b sono i lati del circuito (e quindi i lati del grafo ad esso associato), V_k è la tensione ai capi del lato k e I_k la corrente nel lato k.

In termini di fasori, il teorema diventa ovviamente

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} \overline{V}_k \overline{I}_k = 0}$$

TEOREMA DI BOUCHEROT (ADDITIVITÀ DELLE POTENZE)

Dato un circuito lineare tempo-invariante, in regime sinusoidale, in cui siano presenti dei generatori indipendenti, tutti sinusoidali di ugual pulsazione ω, la somma GEOMETRICA delle potenze complesse da essi fornite è pari alla somma geometrica delle potenze complesse assorbite da ogni singolo componente del circuito.

<u>Dimostrazione</u>

Consideriamo un generico circuito costituito da b lati, per il quale quindi avremo b tensioni di lato $V_1,\ldots,V_b$ e b correnti di lato $I_1,\ldots,I_b$ insieme ai rispettivi fasori. Supponiamo anche che uno di questi lati sia costituito da un generatore (indipendente) di corrente, che indichiamo con I_1. Sappiamo che le correnti di lato soddisfano la LKC espressa in termini di fasori come

$$A\overline{I} = 0$$

Se facciamo il coniugato di entrambi i membri otteniamo

$$A\overline{I}^* = 0$$

dove l'operatore "complesso coniugato" non ha effetto sulla matrice di incidenza ridotta A in quanto essa è ad elementi reali.

Quella relazione indica dunque che anche i fasori coniugati della correnti soddisfano ai vincoli della LKC: deduciamo, perciò, che anche per tali fasori vale il teorema di Thellegen, ossia si ha che

$$\sum_{k=1}^{b} \overline{V}_k \overline{I}_k^* = 0$$

Il termine generico $\overline{V}_k \overline{I}_k^*$ di quella sommatoria indica la potenza complessa assorbita dal k° elemento. Allora, se noi tiriamo fuori dalla sommatoria il termine corrispondente al generatore di corrente, otteniamo

$$-\overline{V}_1 \overline{I}_1^* = \sum_{k=2}^{b} \overline{V}_k \overline{I}_k^*$$

e questa relazione rappresenta proprio la tesi nel caso ci sia 1 solo generatore. Ovviamente, nel caso in cui i generatori fossero α, otterremmo

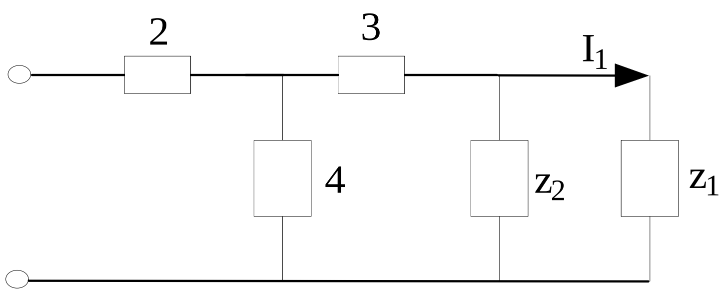
$$-\sum_{k=1}^{a} \overline{V}_k \overline{I}_k^* = \sum_{k=a+1}^{b} \overline{V}_k \overline{I}_k^*$$

N.B. Questo stesso identico teorema è valido anche per la potenza reattiva e per quella attiva, con la differenza che qui parleremo di somma algebrica e non di somma geometrica: si ha cioè che

dato un circuito, in regime sinusoidale, in cui siano presenti dei generatori indipendenti, la somma ALGEBRICA delle potenze reattive/attive da essi fornite è pari alla somma algebrica delle potenze reattive/attive assorbite da ogni singolo componente del circuito.

Esempio

Sia dato il circuito in regime sinusoidale illustrato nella figura seguente:



Usando solo il teorema di Boucherot, determinare la tensione di porta $\overline{V}$ *e la corrente di porta* $\overline{I}$, *sapendo che* I_1*=30(A),* $\dot{z}_1 = 6 + j8$ *e* $\dot{z}_2 = 4 - j3$.

Risoluzione

Applicare il teorema di Boucherot significa far uso delle potenze (attiva P e reattiva Q) in luogo della legge di Ohm.

Possiamo cominciare la nostra analisi dal ramo contenente l'impedenza $\dot{z}_1$: dato che conosciamo la corrente che fluisce in questa impedenza e il valore dell'impedenza stessa, possiamo facilmente calcolare le potenze ad essa associate, ossia

$$\begin{cases} P_1 = R_1 I_1^2 = 6*(30)^2 = 5400(W) \\ Q_1 = X_1 I_1^2 = 8*(30)^2 = 7200(VAR) \\ N_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 9000(VA) \end{cases}$$

A partire dalla potenza apparente associata all'impedenza z_1 e dalla corrente I_1 che fluisce in tale impedenza, possiamo calcolarci la tensione ai suoi capi: ricordando infatti che N=VI deduciamo che

$$V_1 = \frac{N_1}{I_1} = 300(V)$$

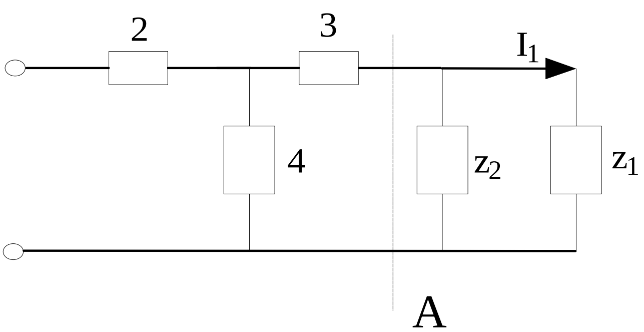
Adesso, questa è la stessa tensione che risulta applicata anche ai capi di z_2, per cui possiamo anche qui calcolare le varie potenze:

$$\begin{cases} P_2 = R_2 I_2^2 = R_2 \dfrac{V_2^2}{R_2^2 + X_2^2} = \dfrac{4*90000}{25} = 14400(W) \\ Q_2 = X_2 I_2^2 = X_2 \dfrac{V_2^2}{R_2^2 + X_2^2} = \dfrac{-3*9000}{25} = -10800(VAR) \\ N_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = 18000(VA) \end{cases}$$

Naturalmente, dalla tensione e dalla potenza apparente, ci calcoliamo anche il valore della corrente che fluisce nell'impedenza z_2:

$$I_2 = \frac{N_2}{V_2} = 60(A)$$

Adesso, includiamo le impedenze z_1 e z_2 in una sola sezione, che indichiamo genericamente con A:



Applicando l'additività delle potenze, possiamo associare alla sezione A le seguenti potenze:

$$\begin{cases} P_A = P_1 + P_2 = 19800(W) \\ Q_A = Q_1 + Q_2 = -3600(VAR) \\ N_A = \sqrt{P_A^2 + Q_A^2} = 28232(VA) \end{cases}$$

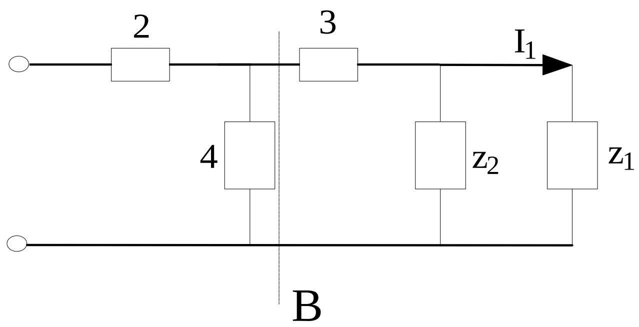
Il calcolo di N_A ci è servito per calcolare la corrente che fluisce nella impedenza da 3 Ω: infatti, questa è la corrente I_A in ingresso alla sezione A ed è legata alla tensione $V_A=V_1=V_2$ in ingresso a tale sezione dalla relazione $N_A = V_A I_A$, per cui abbiamo che

$$I_A = \frac{N_A}{V_A} = \frac{N_A}{V_1} = \frac{28232}{300} = 94(A)$$

A partire da questa corrente, possiamo calcolare le potenze associate all'impedenza da 3 Ω: è chiaro che, trattandosi di una resistenza, ad essa non è associata alcuna potenza reattiva, per cui

$$\begin{cases} P_3 = 3I_A^2 = 26508(W) \\ Q_3 = 0(VAR) \\ N_3 = P_3 = 26508(VA) \end{cases}$$

Includiamo adesso, in una stessa sezione B, l'impedenza da 3 Ω e la sezione A di prima:



In modo analogo a quanto fatto per la sezione A, abbiamo quanto segue:

$$\begin{cases} I_B = I_3 = I_A = 94(A) \\ P_B = P_A + P_3 = 46308(W) \\ Q_B = Q_A = -3600(VAR) \\ N_B = \sqrt{P_B^2 + Q_B^2} = 46448(VA) \end{cases}$$

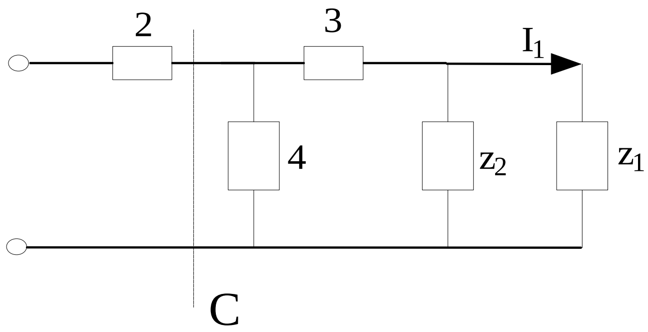
A partire dalla potenza apparente e dalla corrente possiamo come al solito calcolarci la tensione alla porta di questa sezione B: abbiamo infatti che

$$V_B = \frac{N_B}{I_B} = 494(V)$$

Questa è la tensione ai capi della impedenza da 4Ω, per cui possiamo associare a quest'ultima le seguenti potenze:

$$\begin{cases} P_4 = R_4 I_4^2 = R_4 \dfrac{V_4^2}{R_4^2} = \dfrac{V_4^2}{R_4} = 61009(W) \\ Q_4 = 0(VAR) \\ N_4 = P_4 = 61009(VA) \end{cases}$$

Ancora una volta, includiamo questa impedenza e la sezione B in un'unica sezione che indichiamo con C:



Relativamente a questa sezione, abbiamo quanto segue:

$$\begin{cases} P_C = P_B + P_4 = 107317(W) \\ Q_C = Q_B = -3600(VAR) \\ N_C = \sqrt{P_C^2 + Q_C^2} = 107377(VA) \end{cases}$$

Dato che conosciamo la tensione V_4 in ingresso a questa sezione e la potenza apparente N_C ad essa associata, possiamo calcolarci la corrente in ingresso:

$$I_C = \frac{N_C}{V_C} = \frac{N_C}{V_4} = \frac{107377}{494} = 217.4(A)$$

Ma la corrente in ingresso alla sezione C è la corrente che fluisce nella impedenza da 2 Ω ed è anche la corrente in ingresso al circuito, per cui possiamo cominciare a scrivere che

$$I = I_C = I_5 = 217.4(A)$$

A partire dalla corrente, possiamo adesso calcolarci la potenza attiva associata alla impedenza da 2Ω:

$$P_5 = 2I_5^2 = 94493(W)$$

Questa potenza, sommata a quella assorbita dalla sezione C, corrisponde alla <u>potenza attiva totale assorbita dal circuito</u>:

$$P = P_5 + P_C = 201810(W)$$

La potenza reattiva, invece, non cambia, in quanto anche impedenza da 2 Ω non presenta evidentemente alcuna reattanza: possiamo perciò concludere che le potenze ingresso al circuito sono

$$\begin{cases} P = 201810(W) \\ Q = -3600(VAR) \\ N = \sqrt{P_C^2 + Q_C^2} = 201842(VA) \end{cases}$$

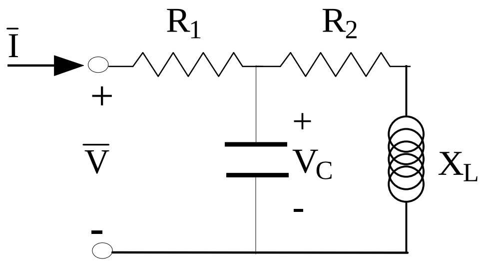
Dato che conosciamo la corrente I in ingresso al circuito, possiamo anche calcolarci la tensione V alla porta usando la potenza apparente appena calcolata: $V = \frac{N}{I} = 928(V)$

Per concludere, possiamo calcolarci quanto vale il fattore di potenza $\cos\varphi$: infatti, ricordando che $P=VI\cos\varphi$, abbiamo che

$$\cos\varphi = \frac{P}{VI} = \frac{P}{N} = 0.998$$

Esempio

Sia dato il circuito in regime sinusoidale illustrato nella figura seguente:



I dati a disposizione sono i seguenti: V_C*=10(V),* R_1*=10(Ω) -* R_2*=5(Ω),* X_L*=5(Ω),* I_C*=2(A). Determinare* $\bar{V}$*,* $\bar{I}$ *e cosj applicando esclusivamente il teorema di Boucherot.*

Risoluzione

La risoluzione di questo esercizio si effettua in modo del tutto analogo a quanto fatto nell'esercizio precedente, per cui effettuiamo solo i calcoli.

I dati da cui partire sono la tensione ai capi del condensatore e la corrente che attraversa il condensatore; in particolare, la tensione è la stessa che risulta applicata alla serie R-L, per cui possiamo calcolarci le potenze associate a tale serie:

$$\begin{cases} P_{RL} = R_2 I_{RL}^2 = R_2 \dfrac{V_C^2}{R_2^2 + X_L^2} = \dfrac{5*100}{25+25} = 10(W) \\ Q_{RL} = X_L \dfrac{V_C^2}{R_2^2 + X_L^2} = \dfrac{5*100}{25+25} = 10(VAR) \\ N_{RL} = \sqrt{P_{RL}^2 + Q_{RL}^2} = 14.14(VA) \end{cases}$$

Adesso, sempre a partire dalla tensione e dalla corrente nel condensatore, possiamo calcolarci le potenze associate anche a questo elemento: infatti, tenendo conto che la potenza attiva associata ad un condensatore è nulla, che la potenza reattiva è pari a Q=VIsinφ e che, in un condensatore, tensione e corrente sono sfasate di 90° (il che significa che sinφ=1), abbiamo che

$$\begin{cases} P_C = 0(W) \\ Q_C = V_C I_C = 20(VAR) \\ N_C = Q_C = 20(VA) \end{cases}$$

Applicando adesso l'additività delle potenze, possiamo scrivere che le potenze associate alla sezione che include il condensatore e la serie R-L sono le seguenti:

$$\begin{cases} P_1 = P_{RL} = 10(W) \\ Q_1 = Q_C + Q_{RL} = 30(VAR) \\ N_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 31.62(VA) \end{cases}$$

Dato che conosciamo la tensione in ingresso alla suddetta sezione e abbiamo appena calcolato la potenza apparente in ingresso, possiamo calcolarci la corrente in ingresso, che rappresenta, tra l'altro, sia la corrente che attraversa R_1 sia anche la corrente in ingresso all'intero circuito:

$$I = \frac{N_1}{V_C} = 3.162(A)$$

A partire da questa corrente, ci possiamo calcolare la potenza attiva assorbita da R_1 (mentre la potenza reattiva è nulla):

$$P_{R1} = R_1 I^2 = 100(W)$$

Possiamo allora concludere che le potenze in ingresso all'intero circuito sono

$$\begin{cases} P = 110(W) \\ Q = 30(VAR) \\ N = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 349.14(VA) \end{cases}$$

A partire dalla potenza apparente e dalla corrente in ingresso, ci calcoliamo la tensione in ingresso:

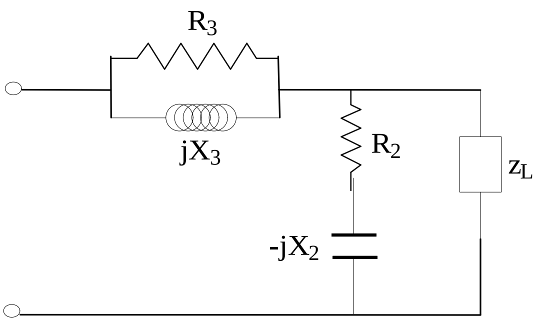
$$V = \frac{N}{I} = 110.4(V)$$

Infine, ci calcoliamo il fattore di potenza cosφ: infatti, ricordando che P=VIcosφ, abbiamo che

$$\cos j = \frac{P}{VI} = \frac{P}{N} = 0.315$$

Esempio

Si consideri il circuito monoporta illustrato nella figura seguente:



I dati sono i seguenti: R_3=10(Ω), R_2=3(Ω), X_3=5(Ω), X_2=4(Ω). Sapendo inoltre che il carico z_L assorbe una potenza attiva P=0.8(W) con una corrente I=10(A) e con un angolo di sfasamento cos(j)=0.8 (induttivo), determinare la potenza in ingresso al circuito.

Risoluzione

Cominciamo col dire che *determinare la potenza in ingresso al circuito significa determinare la potenza complessa* $\overline{N} = P + jQ$ *in ingresso.* Dobbiamo dunque determinare P e Q. Per fare questo calcolo, possiamo applicare il principio di additività delle potenze, secondo il quale la potenza attiva (e reattiva) in ingresso al circuito è pari alla somma delle potenze attive (e reattive) assorbite dai singoli lati del circuito stesso.

Quanti lati ha il nostro circuito? Un lato è costituito dal carico z_L; un altro lato è costituito dalla serie tra resistore e condensatore; un altro lato ancora è il parallelo tra resistore e induttore. A questi tre lati, va ovviamente aggiunto un 4° lato corrispondente ad un ipotetico generatore di tensione applicato alla porta del circuito e costituente l'alimentazione del circuito stesso: in base a questo, possiamo scrivere che

$$P_{TOT} = \sum_{k=1}^{3} P_k$$

$$Q_{TOT} = \sum_{k=1}^{3} Q_k$$

dove, evidentemente P_k è la potenza attiva assorbita o ceduta dal generico lato k, mentre Q_k è la potenza reattiva associata al generico lato k.

Andiamo perciò a calcolarci la potenza attiva e quella reattiva associate a ciascun lato del circuito.

Il primo lato che prendiamo in esame è quello del carico z_L: per questo lato, la traccia ci fornisce già il valore della potenza attiva assorbita (=800W), per cui resta da calcolare la potenza reattiva. Sapendo che

$$\begin{cases} P = VI\cos\varphi \\ Q = VI\sin\varphi \end{cases}$$

è ovvio che $\frac{Q}{P} = tg\varphi$, da cui

$$Q = Ptg\varphi$$

Questa relazione ci consente di calcolare la potenza reattiva nota che sia quella attiva: sapendo che cosφ=0.8, possiamo dunque scrivere che

$$Q = Ptg\varphi = P * tg\left(\arccos(0.8)\right) = 600(VAR)$$

Possiamo dunque concludere, relativamente al lato del carico z_L, che

$$\begin{cases} P_L = 800(W) \\ Q_L = 600(VAR) \end{cases}$$

Adesso dobbiamo passare al lato contenente la serie tra resistore e condensatore. Per calcolare la potenza attiva e la potenza reattiva associate a questo lato, dobbiamo necessariamente conoscere il valore efficace della corrente che scorre in questo lato: solo così, infatti, potremo applicare le relazioni

$$\begin{cases} P = RI^2 \\ Q = XI^2 \end{cases}$$

Possiamo facilmente calcolarci il valore efficace della tensione: è evidente, infatti, che si tratta della stessa tensione ai capi del carico z_L; questo è quanto ci basta, in quanto possiamo procedere nel modo seguente: la tensione e la corrente in un elemento qualsiasi sono legate tra loro dalla relazione

$$N = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

dove N è la potenza apparente, ossia il modulo della potenza complessa. Allora, dato che conosciamo la corrente assorbita da z_L e abbiamo prima calcolato P_L e Q_L, siamo in grado di calcolarci quanto vale V_L:

$$V_L = \frac{\sqrt{P_L^2 + Q_L^2}}{I_L} = \frac{\sqrt{640000 + 360000}}{10} = 100(V)$$

Nota la V_L, siamo in grado di calcolarci la tensione ai capi del resistore: applicando infatti il partitore di tensione, abbiamo che

$$V_{R2} = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + X_2^2}} V_L$$

Dalla tensione ai capi del resistore possiamo ricavarci la corrente che fluisce in esso e quindi anche nel condensatore. Nota la corrente, possiamo calcolarci la potenza attiva e la potenza reattiva:

$$P_{R2} = R_2 I_{R2}^2 = R_2 \frac{V_{R2}^2}{R_2^2} = \frac{V_{R2}^2}{R_2} = 1200(W)$$

$$Q_{X2} = -X_2 I_{X2}^2 = -X_2 I_{R2}^2 = -X_2 \frac{V_{R2}^2}{R_2^2} = -1600(VAR)$$

Abbiamo dunque trovato che

$$\begin{cases} P_{R2} = 1200(W) \\ Q_{X2} = -1600(VAR) \end{cases}$$

Resta adesso da ripetere il calcolo di P e Q per il lato contenente il parallelo tra l'induttore ed il resistore. Qui si ripropone il calcolo del valore efficace della corrente che fluisce in ciascun elemento. Possiamo procedere in questo modo: applicando la LKC, è evidente che

$$I_{R3} + I_{X3} = I_P = I_{R2} + I_L = 22.36(A)$$

La corrente di valore efficace $I_P = 22.36(A)$ è quella che alimenta il collegamento in parallelo, per cui possiamo applicare il partitore di corrente (che ricordiamo va fatto mediante le ammettenze) per calcolare la corrente che fluisce nei due elementi:

$$I_{R3} = \frac{I_P G_3}{\sqrt{G_3^2 + Y_3^2}} = \frac{I_P}{R_3 \sqrt{\frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{X_3^2}}}$$

$$I_{X3} = I_P - I_{R3}$$

A partire dalle correnti, possiamo dunque scrivere che

$$\begin{cases} P_{R3} = R_3 I_{R3}^2 = 1000(W) \\ Q_{X3} = X_3 I_{X3}^2 = 2000(VAR) \end{cases}$$

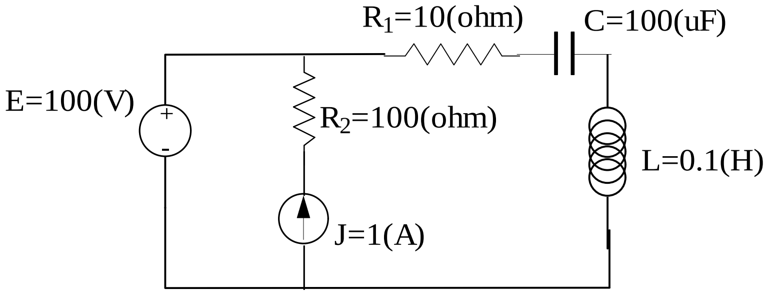
A questo punto, siamo in grado di rispondere al quesito posto dalla traccia: applicando, infatti, il principio di additività delle potenze, abbiamo che

$$\begin{cases} P_{TOT} = P_{R3} + P_{R2} + P_L = 1000 + 1200 + 800 = 3000(W) \\ Q_{TOT} = Q_{X3} + Q_{X2} + Q_L = 2000 - 1600 + 600 = 1000(VAR) \end{cases}$$

Facciamo osservare che il valore positivo della potenza reattiva totale indica un circuito di natura induttiva.

ESEMPIO

Sia dato il circuito in regime sinusoidale illustrato nella figura seguente:



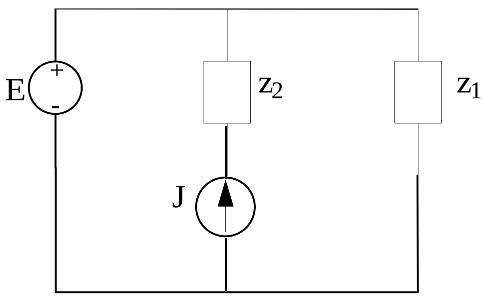
Calcolare la potenza totale dissipata nel circuito e la potenza erogata da ciascun generatore.

<u>Risoluzione</u>

La prima cosa che possiamo fare è rappresentare il circuito in termini di impedenze e di fasori:

- il fasore associato alla forma d'onda del generatore di tensione è $\overline{E} = E\langle 0° = 100\langle 0°$, mentre quello associato alla forma d'onda della corrente è $\overline{J} = J\langle 0° = 1\langle 0°$;
- l'impedenza corrispondente alla serie tra induttore, resistore e condensatore è $\dot{z}_1 = R_1 + j\left(wL - \frac{1}{wC}\right)$;
- l'impedenza corrispondente al solo resistore R_2 è infine $\dot{z}_2 = R_2$.

Il circuito da analizzare è dunque il seguente:



Per quanto riguarda la potenza totale dissipata dal circuito, è ovvio che si tratterà della potenza attiva dissipata dai due resistori, per cui ci serve intanto conoscere la corrente che attraversa tali resistori.

La corrente che attraversa il resistore z_2 è già nota in quanto è quella fornita dal generatore di corrente: la potenza attiva dissipata da questo resistore è allora

$$P_2 = R_2 J^2$$

Per quanto riguarda il resistore R_1, possiamo procedere nel modo seguente: la corrente che attraversa questo resistore è quella che attraversa l'impedenza z_1; essendo $\overline{E}$ la tensione ai capi di questa impedenza, la corrente sarà $\overline{I}_{z1} = \frac{\overline{E}}{\dot{z}_1}$ e quindi la potenza attiva dissipata da R_1 è

$$P_1 = R_1 I_{z1}^2$$

La potenza attiva complessivamente dissipata dai due resistori è dunque

$$P = P_1 + P_2 = 143.25(W)$$

Passiamo alla potenza erogata dai due generatori. Cominciamo, in particolare, dal generatore di corrente: la tensione ai capi di questo generatore si calcola applicando la LKC e risulta

$$\overline{V}_J = \overline{E} + R_2\overline{J} = E + R_2 J = 200(V)$$

(questa tensione risulta essere evidentemente un numero reale, il che significa che essa è in fase con le forme d'onda dei due generatori).

La tensione ai capi del generatore di corrente ci serve per affermare che la potenza attiva da esso erogata vale

$$P_J = \mathrm{Re}\left[\overline{V}_J * \overline{J}\right] = \mathrm{Re}\left[200 * 1\right] = 200(W)$$

A questo punto, dovremmo ripetere lo stesso ragionamento per il calcolo della potenza attiva erogata dal generatore di tensione: dovremmo cioè calcolare la corrente che fluisce in esso in modo da calcolare la potenza attiva come $P_E = \mathrm{Re}\left[\overline{E} * \overline{I}_E\right]$. In realtà, possiamo procedere in modo molto più semplice: infatti, è chiaro che deve sussistere l'eguaglianza

$$P_{fornita} = P_{dissipata}$$

La potenza attiva dissipata è stata calcolata prima e valeva 143.25(W), per cui

$$P_{fornita} = 143.25(W)$$

La potenza attiva fornita è chiaramente quella fornita dai due generatori, per cui vale

$$P_{fornita} = P_E + P_J$$

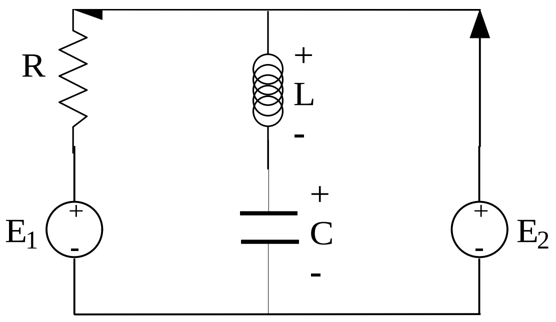
Possiamo dunque scrivere semplicemente che

$$P_E = 143.25(W) - P_J = -56.75(W)$$

Il fatto che la potenza attiva erogata dal generatore di tensione sia negativa indica che il generatore assorbe potenza attiva.

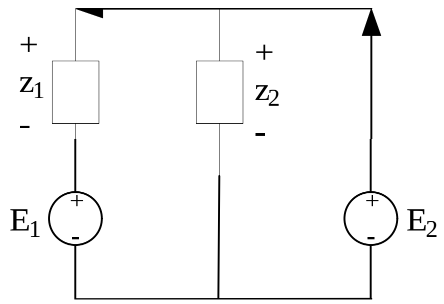
ESEMPIO

Sia dato il circuito in regime sinusoidale illustrato nella figura seguente:



Calcolare la potenza totale dissipata nel circuito e la potenza disponibile alla porta A-B. I dati sono i seguenti: E_1=10(V), E_2=14(V), R=2(Ω), X_C=-j30(Ω), X_L=j100(Ω).

<u>Risoluzione</u>
La prima cosa che possiamo fare è rappresentare il circuito in termini di impedenze e di fasori:



Ovviamente, abbiamo posto

$$\dot{z}_1 = R_1 = 2(\text{ohm})$$
$$\dot{z}_2 = j(X_L - X_C) = j(100-30) = j70(\text{ohm})$$

Per quanto riguarda la potenza totale dissipata dal circuito, è ovvio che si tratterà della potenza attiva dissipata dal resistore, per ci serve conoscere la corrente che lo attraversa: applicando semplicemente la LKT e la relazione di lato di questo elemento, abbiamo che

$$\overline{I}_{z1} = \frac{\overline{V}_{z1}}{\dot{z}_1} = \frac{\overline{E}_2 - \overline{E}_1}{\dot{z}_1} = \frac{4}{2} = 2(A)$$

Si tratta di un numero reale, il che indica che questa corrente è in fase con le forme d'onda dei due generatori di tensione.

A partire dalla corrente, possiamo subito calcolarci la potenza attiva dissipata:

$$P = RI_{z1}^2 = 8(W)$$

Passiamo alla potenza disponibile alla porta A-B, ossia alla potenza complessa a tale porta: applicando semplicemente la definizione, se indichiamo con $\overline{I}_{AB}$ il fasore associato alla corrente che fluisce nel generatore di tensione $\overline{E}_2$, ossia appunto il fasore associato alla corrente che fluisce alla porta A-B, possiamo scrivere che

$$\overline{N}_{AB} = \overline{V}_{AB}\overline{I}_{AB}^* = \overline{E}_2\overline{I}_{AB}^*$$

Dobbiamo dunque calcolarci $\overline{I}_{AB}^*$. Applicando la LKC, abbiamo che $\overline{I}_{AB} = \overline{I}_{z1} + \overline{I}_{z2}$. Noi conosciamo già $\overline{I}_{z1}$, per cui serve solo calcolare $\overline{I}_{z2}$: il calcolo è immediato, visto che la tensione ai capi di z_2 è $\overline{E}_2$, per cui abbiamo che

$$\overline{I}_{z2} = \frac{\overline{V}_{z2}}{\dot{z}_2} = \frac{\overline{E}_2}{\dot{z}_2} = \frac{14}{j70} = -j0.2(A)$$

Possiamo dunque concludere che

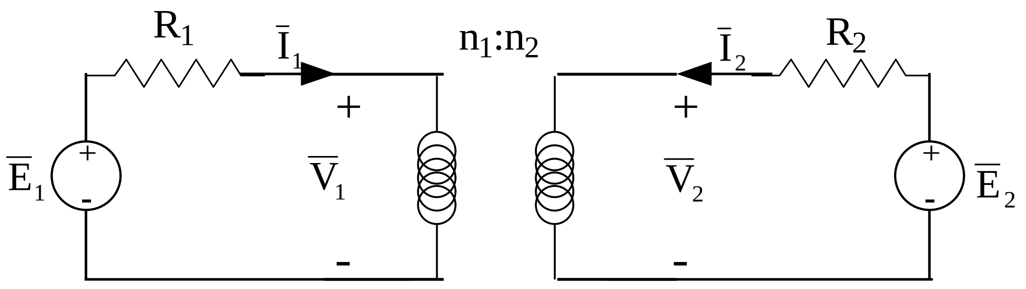
$$\overline{I}_{AB} = \overline{I}_{z1} + \overline{I}_{z2} = 2 - j0.2 \quad (A)$$

e quindi che la potenza complessa alla porta A-B è

$$\overline{N}_{AB} = \overline{E}_2\overline{I}_{AB}^* = 14(2+j0.2) = 28 + j2.8 \quad (VA)$$

ESEMPIO

Si consideri il circuito in regime sinusoidale illustrato nella figura seguente:



Il trasformatore ideale, avente rapporto spire $n=n_1/n_2=0.5$, è alimentato da 2 generatori di tensione $\bar{E}_1 = 10\langle 0°$ *e* $\bar{E}_2 = 10\langle 60°$*, ciascuno con resistenza interna (rispettivamente R_1=5Ω e R_2=20Ω). Determinare la potenza attiva fornita dal generatore* $\bar{E}_2$*.*

<u>Risoluzione</u>

In primo luogo, individuiamo ciò che dobbiamo calcolare: indicata con $\bar{I}_2 = I_2\langle j$ la corrente che fluisce all'interno del generatore $\bar{E}_2$, possiamo scrivere, per semplice definizione, che la potenza attiva erogata da tale generatore vale

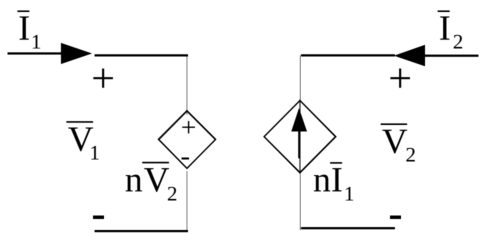
$$P_2 = E_2 I_2 \cos j$$

Tutto sta, dunque, a calcolarsi quanto vale $\bar{I}_2 = I_2\langle j$.

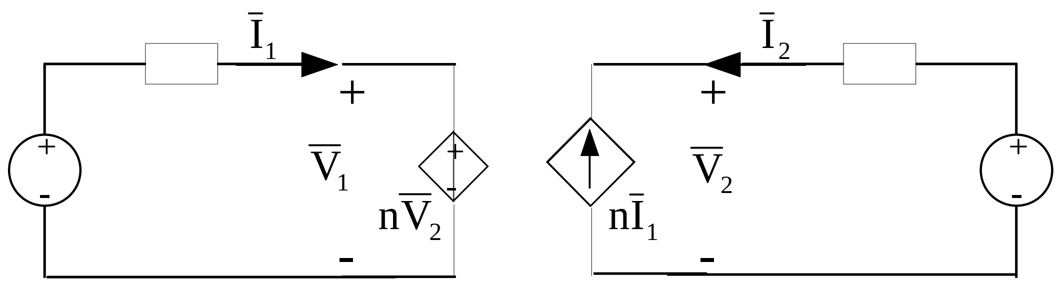
Per fare questo calcolo, è opportuno sostituire al trasformatore ideale la sua rappresentazione circuitale equivalente: tenendo conto che le equazioni di funzionamento del trasformatore sono

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = n\bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 = -n\bar{I}_1 \end{cases}$$

tale rappresentazione equivalente è la seguente:



Usando questa rappresentazione, il circuito diventa il seguente:



Possiamo dunque scrivere che

$$\bar{I}_2 = -n\bar{I}_1 = -n\frac{\bar{V}_{z1}}{\dot{z}_1} = -n\frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_1}{\dot{z}_1} = -n\frac{\bar{E}_1 - n\bar{V}_2}{\dot{z}_1} = -n\frac{\bar{E}_1 - n\left(\bar{E}_2 - \bar{V}_{z2}\right)}{\dot{z}_1} =$$
$$= -n\frac{\bar{E}_1 - n\left(\bar{E}_2 - \dot{z}_2\bar{I}_2\right)}{\dot{z}_1}$$

da cui

$$\bar{I}_2 = \frac{n^2\bar{E}_2 - n\bar{E}_1}{\dot{z}_1 + n^2\dot{z}_2} = \frac{10n^2\langle 60° - 10}{5 + 20n^2} = 2\frac{n^2\langle 60° - 1}{1 + 4n^2} = 2\frac{n^2\cos(60°) + jn^2\sin(60°) - 1}{1 + 4n^2} =$$
$$= 0.375 + j0.2175 = 0.43\langle 150°$$

A questo punto, rimane solo da applicare la formula $P_2 = E_2 I_2 \cos\varphi$, ma possiamo anche risparmiarcelo: si nota infatti che la corrente $\bar{I}_2$ risulta sfasata di φ=90° in ritardo rispetto alla tensione $\bar{E}_2$, il che comporta che cosφ=0 e quindi che il generatore in questione eroga potenza attiva nulla.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1