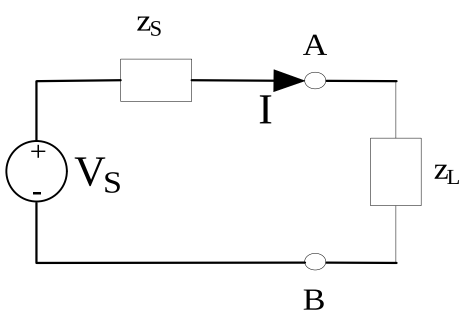
Appunti di Elettrotecnica

Analisi in regime sinusoidale (parte V)

TEOREMA SUL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA ATTIVA

Sia dato il circuito monoporta rappresentato in figura:



(La porzione di circuito a sinistra della porta A-B può essere pensata come l'equivalente di Thevenin di un circuito comunque complesso)

Supponiamo che la tensione di alimentazione sia sinusoidale e che il fasore ad essa associato sia $\overline{V}_S = V_S\langle 0°$ *. Siano inoltre*

$$\dot{z}_S = R_S + jX_S$$
$$\dot{z}_L = R_L + jX_L$$

le due impedenze (di cui z_S *nota) del circuito.*

Vogliamo calcolare il valore dell'impedenza dell'elemento L affinché esso assorba la massima potenza attiva possibile.

Il teorema afferma che tale valore è il complesso coniugato dell'impedenza assegnata:

$$\boxed{\dot{z}_L = \dot{z}_S{}^*}$$

Dimostrazione

L'elemento L assorbe una potenza attiva pari, per definizione, a $P_{A,L} = R_L I^2$. Per calcolarla serve dunque il valore della corrente che scorre nel circuito. Applicando la LKT al circuito risulta evidentemente

$$\overline{V}_S = (\dot{z}_L + \dot{z}_S)\overline{I}$$

Sostituendo le espressioni delle due impedenze otteniamo

$$\overline{V}_S = [(R_L + jX_L) + (R_S + jX_S)]\overline{I} = [(R_L + R_S) + j(X_L + X_S)]\overline{I}$$

Esplicitando il valore della corrente che scorre nel circuito abbiamo dunque che

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}_S}{[(R_L + R_S) + j(X_L + X_S)]}$$

Passando ai moduli, quella relazione diventa

$$I = \frac{V_S}{\sqrt{(R_L + R_S)^2 + (X_L + X_S)^2}}$$

La potenza attiva assorbita dall'elemento L è allora

$$P_{A,L} = R_L I^2 = \frac{R_L V_S}{\left[(R_L + R_S)^2 + (X_L + X_S)^2\right]}$$

A questo punto, noi dobbiamo determinare il valore di R_L e X_L affinché quella frazione raggiunga il proprio valore massimo. E' intanto ovvio che ciò accade quanto più piccolo è il denominatore e quando più grande è il numeratore. Il denominatore è la somma di due termini positivi, per cui esso diminuisce se ne sparisce uno dei due: per esempio, se prendiamo X_L=-X_S, otteniamo

$$P_{A,L} = \frac{R_L V_S}{(R_L + R_S)^2}$$

ed il valore della frazione è senz'altro cresciuto. Inoltre, abbiamo così ottenuto a secondo membro una funzione nella sola variabile R_L, per cui possiamo facilmente calcolarci il suo massimo: basta derivare e uguagliare a zero. Facendo i calcoli, il punto di massimo si ottiene per R_L=R_S.

La tesi è dunque dimostrata, in quanto abbiamo trovato che l'impedenza di L presenta la stessa parte reale di S, mentre il coefficiente della parte immaginaria risulta solo cambiato di segno.

Valore della massima potenza attiva assorbita: rendimento del circuito

Noto il valore dell'impedenza in corrispondenza della quale l'elemento L assorbe la massima potenza attiva P_{max}, possiamo anche calcolarci quanto vale P_{max}: infatti, dalla relazione

$$P_{A,L} = \frac{R_L V_S}{(R_L + R_S)^2}$$

basta porre $R_L=R_S$ per ottenere che

$$P_{max} = \frac{V_S}{4R_S{}^2}$$

Ovviamente, *a fornire potenza attiva è il generatore di tensione, che alimenta entrambi i carichi.* La potenza attiva da esso trasferita al circuito (ossia l'energia per unità di tempo) è

$$P = R_S I^2 + R_L I^2 = 2R_S I^2 = 2R_S\left(\frac{V_S^2}{4R_S^2}\right) = \frac{V_S^2}{2R_S}$$

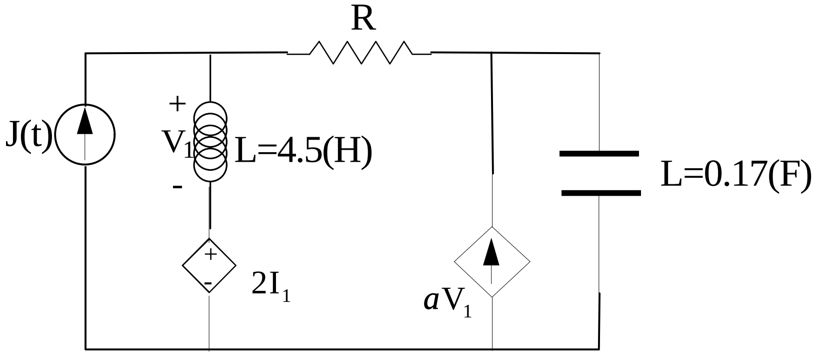
Prende allora il nome di **rendimento del circuito** il numero

$$\mu = \frac{P_{max}}{P} = 0.5$$

ossia il rapporto tra la massima potenza attiva assorbita dal carico e la potenza attiva erogata dal generatore. Il fatto che risulti $\mu=0.5$ indica che, *in condizioni di adattamento del carico, ossia quando è soddisfatto il teorema del massimo trasferimento di potenza, il 50% della potenza attiva erogata dal generatore viene dissipata.*

Esempio

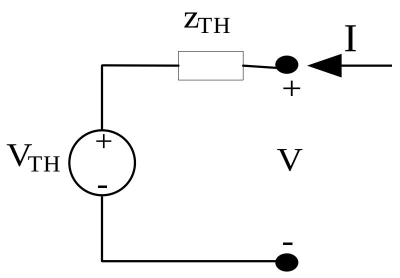
Sia dato il circuito mostrato in figura:



Sapendo che $J(t) = 10\cos(2t)$*, determinare i valori di R e di a tali che il massimo della potenza sia trasferito su R. Determinare inoltre il valore di tale potenza.*

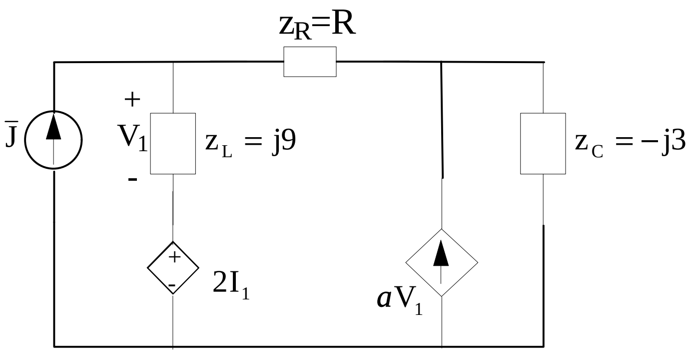
Risoluzione

Il modo più veloce di risolvere questo esercizio consiste nel trovare il circuito equivalente di Thevenin, alla porta A-B cui è collegato R:



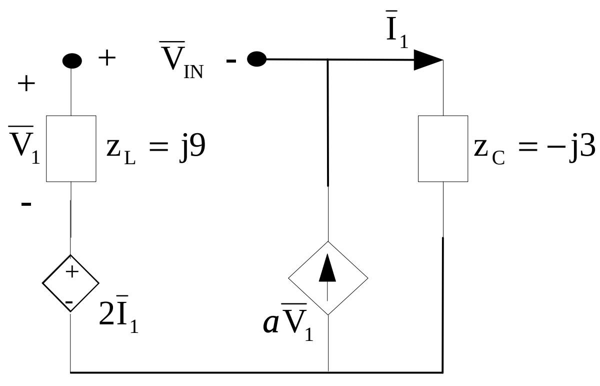
Infatti, determinando $\dot{z}_{TH}$, ci basterà imporre, in base al teorema sul massimo trasferimento di potenza, che $\dot{z}_{TH} = R^* = R$; inoltre, conoscendo anche $\overline{V}_{TH}$, saremo in grado di calcolare la corrente che fluisce in R e quindi la potenza attiva dissipata da questo resistore.

Prima di passare ai calcoli, è opportuno rappresentare il circuito in termini di fasori e impedenze:



dove ovviamente si è posto $\overline{J} = \frac{10}{\sqrt{2}}\langle 0°$.

Cominciamo allora a calcolare $\dot{z}_{TH}$: per definizione, si tratta del rapporto V/I alla porta del circuito quando gli eventuali generatori indipendenti presenti nel circuito sono passivati; nel nostro caso, ci basta passivare il generatore indipendente di corrente, per cui il circuito su cui ragionare è il seguente:



Applicando la LKT, la LKC e le relazioni di lato abbiamo che

$$\overline{V}_{IN} = 2\overline{I}_1 + \overline{V}_1 - \overline{V}_C = 2\overline{I}_1 + X_L\overline{I}_{IN} - X_C\overline{I}_1 = (2 - X_C)\overline{I}_1 + X_L\overline{I}_{IN} =$$
$$= (2 - X_C)(\alpha\overline{V}_1 - \overline{I}_{IN}) + X_L\overline{I}_{IN} = (2 - X_C)(\alpha X_L\overline{I}_{IN} - \overline{I}_{IN}) + X_L\overline{I}_{IN}$$

da cui

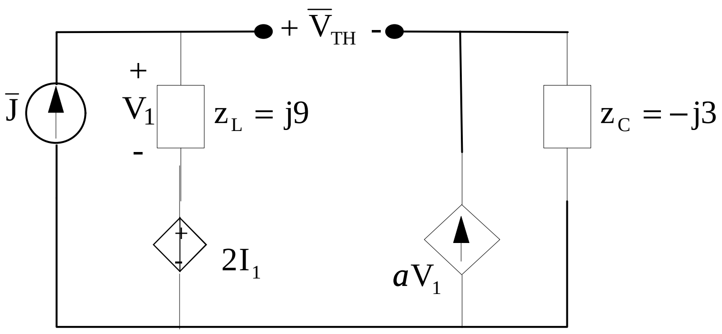
$$\dot{z}_{TH} = \frac{\overline{V}_{IN}}{\overline{I}_{IN}} = (2 - X_C)(\alpha X_L - 1) + X_L = 2\alpha X_L - 2 - \alpha X_L X_C + X_C + X_L$$

Ponendo adesso X_L=j9 e X_C=-j3, questa diventa

$$\dot{z}_{TH} = j18\alpha - 2 - 27\alpha - j3 + j9 = (27\alpha - 2) + j(18\alpha + 6)$$

Imponendo allora la condizione $\dot{z}_{TH} = R^* = R$, troviamo che α=-1/3 e quindi $R = 7$.

Adesso, al fine di determinare la potenza attiva trasferita su R, dobbiamo determinare $\overline{V}_{TH}$: per definizione, si tratta della tensione alla porta del circuito quando la porta stessa è in condizioni di circuito aperto. Il circuito su cui fare i calcoli è quindi il seguente:



Abbiamo evidentemente che

$$\overline{V}_{TH} = \overline{V}_1 + 2\overline{I}_1 - \overline{V}_C = X_L\overline{J} + 2a\overline{V}_1 - X_C a\overline{V}_1 = X_L\overline{J} + 2aX_L\overline{J} - X_C a X_L\overline{J} =$$
$$= X_L\overline{J}(1 + 2a - X_C a) = j9\frac{10}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{2}{3} - j\right) = \frac{10}{\sqrt{2}}(9 + j3) = 67.1\angle 18.435°$$

Da qui ricaviamo che il valore efficace della corrente che fluisce in R è

$$I = \frac{V_{TH}}{R + R_{TH}} = \frac{67.1}{14} = 4.8$$

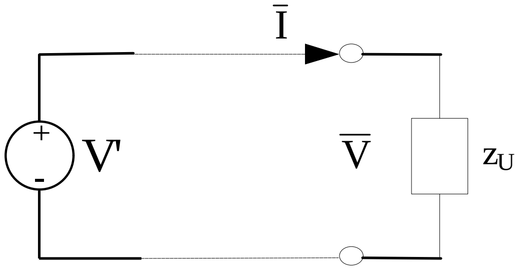
e quindi che la potenza attiva assorbita da questo resistore è

$$P = RI^2 = 160.7(W)$$

IL RIFASAMENTO

Abbiamo visto in precedenza che, *mentre la potenza attiva è indice di un trasferimento di energia definitivo o dall'esterno verso il circuito (quando è positiva) o dal circuito verso l'esterno (quando è negativa), al contrario la potenza reattiva è indice di un flusso di energia diretto alternativamente dall'esterno al circuito e viceversa.* Allora, si potrebbe pensare che, da un punto di vista tecnico, questo flusso non abbia molta importanza, in quanto ad esso non è associato alcun trasferimento definitivo di energia. Faremo invece vedere adesso come anche la potenza reattiva sia importante dal punto di vista tecnico.

Consideriamo un semplice schema di una rete di distribuzione in regime sinusoidale:



Abbiamo perciò un carico, rappresentato da una certa impedenza $\dot{z}_U$, alimentato da una **cabina di distribuzione** che fornisce, attraverso una **linea** di una certa lunghezza, una tensione sinusoidale per il carico stesso rappresentata dal fasore $\bar{V}$. Sia $\bar{I}$ il fasore che rappresenta la corrente che attraversa il carico e la linea in virtù dell'alimentazione fornita dalla rete.

In uno schema di questo tipo, sorgono dei problemi legati al fatto che la linea di trasmissione presenta una certa impedenza e questo fa sì che, nel momento in cui circola corrente nella linea, si abbia una dissipazione di energia su di essa: ovviamente, questa dissipazione di energia, a parità di impedenza, è tanto maggiore quanto maggiore è il valore efficace della corrente che attraversa la linea stessa. Ci chiediamo allora se è possibile ridurre il valore efficace della corrente di linea (che è uguale alla corrente che fluisce nel carico), pur lasciando invariate sia la tensione applicata ai capi del carico sia anche la potenza attiva erogata al carico stesso.

Per rispondere a questa domanda è opportuno ricordare due formule tra quelle viste fino ad ora:

- la prima formula riguarda la potenza apparente associata al carico, che sappiamo essere

$$N = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

  dove V è il valore efficace della tensione ai capi del carico e dove I è il valore efficace della corrente che attraversa il carico e la linea;

- la secondo formula riguarda invece il legame tra la potenza attiva P e la potenza reattiva Q associata ad un carico qualsiasi: si tratta della relazione

$$Q = P\text{tg}\varphi$$

  dove φ è quello che abbiamo definito "angolo di sfasamento" e rappresenta l'argomento dell'impedenza di ingresso del carico.

Queste due formule ci servono per fare il discorso seguente: dalla prima si intuisce che, *se vogliamo ridurre il valore efficace I della corrente di linea, lasciando però invariati il valore efficace V della tensione sul carico e la potenza attiva P erogata al carico, dobbiamo necessariamente ridurre la potenza reattiva Q.*

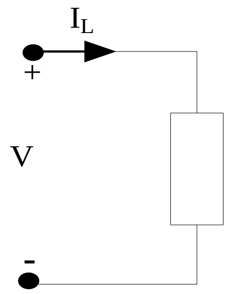
Ma, in base alla relazione che lega Q a P, è evidente che, *per ridurre Q, a parità di P, è necessario ridurre l'angolo di sfasamento j della corrente di linea rispetto alla tensione.*

Si definisce allora **rifasamento** una qualsiasi operazione che, a parità di P e di V, diminuisce il valore di φ, aumentando di conseguenza il fattore di potenza, ossia il fattore $\cos\varphi$.

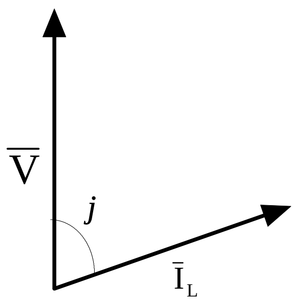
Rifasamento di una carico ohmico-induttivo

Il caso più frequente è quello in cui il carico è di tipo ohmico-induttivo, per cui si ha **φ>0**. Vediamo come si effettua una operazione di rifasamento in questo caso e quali sono le sue conseguenze.

Consideriamo un circuito monoporta costituito da un elemento di impedenza $\dot{z}$ nota. Supponiamo che sia I_L il valore efficace della corrente con la quale esso viene alimentato dalla rete esterna e indichiamo con V il valore efficace della corrispondente tensione:



In queste condizioni, il carico assorbe una certa quantità di energia, della quale parte si dissipa (attraverso i resistori presenti nel carico) e parte si conserva (attraverso condensatori e induttori). Se supponiamo che il carico sia di tipo ohmico-induttivo, sappiamo che i fasori della tensione sul carico (presa come riferimento) e della corrente nel carico sono geometricamente disposti nel modo seguente:

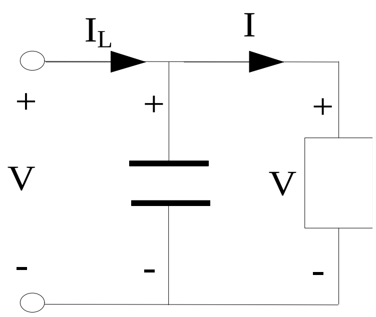


(questo diagramma indica che la corrente è in ritardo rispetto alla tensione di un angolo pari a φ).

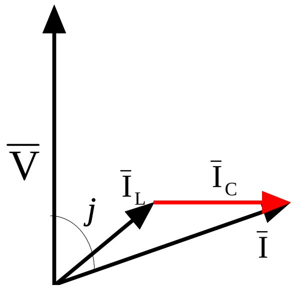
Immaginiamo allora di inserire in parallelo al carico un condensatore, in modo che la corrente di linea I_L si ripartisca secondo la relazione

$$\bar{I}_L = \bar{I}_C + \bar{I}$$

dove $\bar{I}$ è la nuova corrente che va ad alimentare il carico, mentre $\bar{I}_C$ è quella che va a caricare il condensatore:



Il diagramma delle correnti e delle tensioni è adesso il seguente:



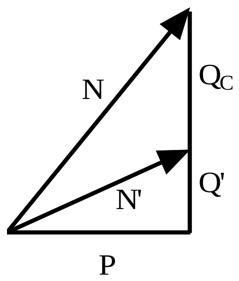
Essendo la corrente $\overline{I}_C$ in anticipo rispetto alla tensione $\overline{V}$ di 90°, si nota come il valore efficace della corrente di linea possa essere notevolmente ridotto (riducendo così gli effetti negativi di cui è parlato) scegliendo in modo opportuno la capacità del condensatore. Naturalmente, come detto prima, questa riduzione del valore efficace della corrente di linea corrisponde ad una diminuzione del suo angolo di sfasamento rispetto alla tensione.

Il problema da risolvere adesso è dunque il seguente: nota la tensione di alimentazione esterna (cioè noto il fasore $\overline{V}$), fissate la potenza attiva P e la potenza reattiva Q=Ptgφ erogate al carico, fissato l'angolo di sfasamento φ della corrente nel carico rispetto alla tensione di alimentazione, dobbiamo calcolare il valore della capacità C tale che l'angolo di sfasamento della corrente di linea passi dal valore iniziale φ (in assenza del condensatore) ad un prefissato valore φ' (ovviamente inferiore a φ).

Cominciamo col dire che il complesso costituito dal carico e dal condensatore in parallelo assorbe una potenza attiva pari sempre a P (in quanto al condensatore non è associata alcuna potenza attiva) ed una potenza reattiva Q'; questa è esprimibile, mediante il **teorema di Boucherot**, nella forma

$$Q' = Q + Q_C$$

dove Q_C è la potenza reattiva assorbita dal condensatore, mentre Q è quella, fissata, assorbita dal carico:



La potenza reattiva è legata alla potenza attiva P (che ricordiamo ancora una volta essere la stessa prima e dopo l'inserimento del condensatore, in quanto è legata SOLO agli elementi dissipativi) dalla relazione

$$Q' = P\text{tg}\varphi'$$

per cui abbiamo che

$$Q_C = Q' - Q = P\text{tg}\varphi' - P\text{tg}\varphi = P(\text{tg}\varphi' - \text{tg}\varphi)$$

Per definizione, sappiamo inoltre che la potenza reattiva associata al condensatore è $Q_C = X_C I_C^2$. Allora, poiché il valore efficace della corrente nel condensatore è $I_C = \frac{V}{X_C}$, deduciamo che

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C}$$

La reattanza all'impedenza di un condensatore è pari a -1/ωC, per cui concludiamo che

$$Q_C = -\omega C V^2$$

Uguagliando allora le due espressioni trovate per Q_C ed esplicitando il valore di C possiamo concludere che la capacità del condensatore, necessaria per ottenere un angolo di sfasamento φ' della corrente di linea rispetto alla tensione, deve valere

$$\boxed{C = \frac{P}{\omega V^2}\left(\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\varphi'\right)}$$

Rifasamento completo

Un caso particolare di rifasamento, che prende il nome di **rifasamento completo**, è quello in cui il valore di C viene scelto in modo che il valore efficace della corrente di linea assuma il suo valore minimo. Ci chiediamo, allora quando questo possa accadere.

Basta partire dal fatto che la potenza attiva in ingresso al circuito è pari alla potenza attiva in ingresso al carico: sulla base di ciò, noi possiamo scrivere che

$$P = VI_L \cos\varphi' = VI\cos\varphi$$

da cui si ricava evidentemente che il valore efficace della corrente di linea è

$$I_L = \frac{I\cos\varphi}{\cos\varphi'}$$

Da questa relazione, essendo I e cosφ due termini costanti legati al carico, appare ovvio che il minimo valore di I_L si ottiene quando la quantità cosφ' raggiunge il suo valore massimo: tale valore massimo è 1 e si raggiunge quando φ'=0.

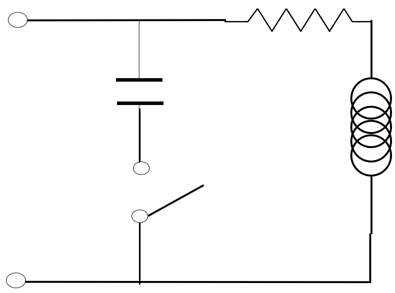
Quindi, *il valore minimo della corrente di linea si ottiene quando la corrente di linea è in fase con la tensione di alimentazione del complesso condensatore-utilizzatore.*

Perché ciò accada, la capacità C del condensatore dovrò chiaramente essere

$$\boxed{C = \frac{P\,\mathrm{tg}\varphi}{\omega V^2}}$$

ESEMPIO

Sia dato il circuito illustrato nella figura seguente:



Assumendo una frequenza f=1kHz, determinare il valore della capacità da inserire come in figura affinché i fasori $\bar{V}$ ed $\bar{I}$ risultino in fase tra di loro.

Risoluzione

Il modo più immediato di risolvere questo esercizio è quello di determinare quanto vale la fase di $\bar{I}$ e di imporre che essa sia nulla così come la fase della tensione di alimentazione.

Applicando la LKC, abbiamo che

$$\bar{I} = \bar{I}_C + \bar{I}_L$$

per cui andiamo a calcolarci le correnti che fluiscono nel ramo del condensatore e nel ramo della serie induttore-resistore:

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{\dot{z}_C} = \frac{V\langle 0°}{\frac{1}{\omega C}\langle -90°} = \omega CV\langle 90° = j\omega CV$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{\dot{z}_L} = \frac{V}{R + j\omega L} = \frac{V(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{RV}{R^2 + \omega^2 L^2} - j\frac{\omega LV}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Note queste due correnti, abbiamo che

$$\bar{I} = \bar{I}_C + \bar{I}_L = \frac{RV}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega CV - \frac{\omega LV}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

La fase della corrente in ingresso al circuito è dunque

$$\varphi_I = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega CV - \frac{\omega LV}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{RV}{R^2 + \omega^2 L^2}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\omega\frac{C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{RV}{R^2 + \omega^2 L^2}}\right)$$

Imponendo che essa risulti nulla, ossia imponendo che risulti =0 l'argomento dell' "arctg", otteniamo evidentemente

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Si potrebbe procedere anche in altro modo: infatti, è chiaro che, affinché la corrente e la tensione in ingresso al circuito risultino in fase, il circuito deve risultare resistivo, ossia la parte immaginaria della sua impedenza deve risultare nulla. Di conseguenza, possiamo trovarci l'impedenza del circuito, che è

$$\dot{z} = \dot{z}_C // (R + jwL) = \frac{-\frac{j}{wC}(R + jwL)}{R + j\left(wL - \frac{1}{wC}\right)} = \frac{\left(-j\frac{R}{wC} + \frac{L}{C}\right)\left(R - j\left(wL - \frac{1}{wC}\right)\right)}{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}$$

in modo poi da annullare la sua reattanza: otteniamo in tal modo l'equazione

$$\frac{L}{wC^2} - \frac{R^2}{wC} - \frac{wL^2}{C} = 0$$

da cui, ovviamente, si ottiene lo stesso risultato di prima, ossia $C = \frac{L}{R^2 + w^2 L^2}$.

Un altro modo ancora di procedere è il seguente: richiedere che sia φ=0 equivale a richiedere che sia nulla la potenza reattiva Q associata al circuito, la quale ha infatti espressione

$$Q = VI\sin j$$

Possiamo allora calcolare quanto vale Q: naturalmente, la potenza reattiva è associata solo all'induttore ed al condensatore, per cui richiedere che sia =0 equivale a richiedere che

$$Q_L = Q_C$$

Questa relazione equivale anche a

$$X_L I_L^2 = X_C I_C^2$$

per cui è necessario calcolare le due correnti e risolvere ancora una volta rispetto a C.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1