



Appunti di Teoria dei Segnali

*Formulario per l'esame di
Teoria dei Segnali
Svolto col prof. **Camarda***

Giuseppe Modugno

Politecnico di Bari

Ingegneria Elettronica

21 Settembre 1998

Questo formulario è stato scritto da Giuseppe Modugno, studente in Ingegneria Elettronica al Politecnico di Bari, in occasione dell'esame "Teoria dei Segnali" svolto con il prof. Camarda, per una rapida consultazione durante la prova scritta. Rappresenta una estrapolazione dei miei appunti presi durante le lezioni tenute dal prof. Camarda nell'anno scolastico 1997/98 al Politecnico di Bari.
Finito di stampare il 21 Settembre 1998.

Giuseppe Modugno
21 Settembre 1998

Indice

I	Segnali determinati	1
1	Generalità sui segnali determinati	2
1.1	Segnali continui	2
1.1.1	Convoluzione, correlazione ed autocorrelazione	3
1.2	Segnali discreti	4
2	Serie di Fourier	5
2.1	Serie di Fourier per segnali reali	6
3	Trasformata di <i>Fourier</i>	8
3.1	Proprietà della trasformata di <i>Fourier</i>	8
3.2	Trasformata di <i>Fourier</i> per segnali reali	9
3.3	Trasformata di <i>Fourier</i> per segnali di potenza	10
3.3.1	Segnali periodici	10
4	Sistemi di trasformazione di segnali	11
4.1	Generalità sui sistemi	11
4.2	Sistemi lineari tempo-invarianti	12
4.3	Sistemi lineari discreti	13
5	Campionamento	14
6	Autocorrelazione	16
6.1	Segnali di energia	16
6.2	Segnali di potenza	17
6.3	Segnali periodici	18
7	<i>F</i>-trasformata per segnali discreti	20
7.1	Segnali di energia	20
7.2	Caso particolare di segnali di potenza: segnali periodici	21
8	Trasformata di <i>Hilbert</i>	22

II	Segnali aleatori	23
9	Processi stocastici	24
9.1	Processi stazionari	24
9.2	Ergodicità di un processo	25
9.3	Filtraggio di un processo stocastico stazionario	26
10	Catene di <i>Markov</i>	27
10.1	Catene di <i>Markov</i> tempo-discrete	27
10.2	Catene di <i>Markov</i> tempo-continue	29
III	Trasmissione del segnale	31
11	Codifica di canale	32
11.1	Generalità sulla codifica del canale	32
11.2	Codifica a ripetizione	34
11.3	Codifica a controllo di parità	35
12	Quantizzazione	37
13	Trasmissione di un segnale	39
13.1	Campionatore	40
13.2	Segnali a banda non limitata	41
13.3	Filtro passa-basso	41
13.4	Interpolatore	42
14	Il segnale telefonico	43
15	Codifica delle sorgenti discrete	47
16	Modulazione	51
16.1	Modulazione di ampiezza AM	52
16.1.1	DSB-SC	52
16.1.2	SSB	54
16.1.3	VSB	55
16.1.4	AM <i>standard</i>	55
16.2	Modulazione in frequenza FM e in fase FM	56
17	Rumore	58
17.1	Caratteristiche del rumore termico	58
17.2	Filtraggio del rumore attraverso un SLI	59

17.3	Cifra di rumore e temperatura equivalente di rumore	60
17.4	L'attenuatore resistivo	61
17.5	Circuiti rumorosi in cascata	61
18	Rumore nella modulazione	62
18.1	Rumore nella modulazione AM DSB-SC	63
18.2	Rumore nella modulazione AM SSB	64
18.3	Rumore nella modulazione AM <i>standard</i>	65
18.4	Rumore nella modulazione FM	66
19	Teoria delle code	68
19.1	Coda M/M/1	69
19.2	Coda M/M/2	70
IV	Appendici	71
A	Segnali determinati	72
A.1	Segno	72
A.2	Gradino unitario	72
A.3	Rettangolo	73
A.4	Esponenziale decrescente	73
A.5	Seno cardinale	74
A.6	Impulso	74
A.7	Seno	75
A.8	Coseno	76
B	Convoluzioni importanti	77
B.1	Rettangolo-rettangolo	77
B.1.1	Due rettangoli uguali	78
B.2	Rettangolo-esponenziale	78
C	Distribuzioni continue	79
C.1	Distribuzione gaussiana	79
C.2	Distribuzione esponenziale negativa	80
D	Processi importanti	82
D.1	Processo di <i>Bernoulli</i>	82
D.1.1	Passeggiata casuale	82
D.2	Processo di <i>Poisson</i>	83
D.2.1	Processo telegrafico casuale	83

Parte I

Segnali determinati

Capitolo 1

Generalità sui segnali determinati

Un segnale determinato è una funzione che assume valori ben precisi e noti nel dominio di definizione. Esistono due tipi di segnali determinati a seconda del campo di esistenza:

segnali continui il cui insieme di definizione è un intervallo o tutto l'asse reale (da non confondere con una funzione continua);

segnali discreti il cui insieme di definizione è formato da istanti di tempo discreti, equamente intervallati.

Inoltre, un segnale determinato può essere *a valori discreti* o *a valori continui*: nel primo caso, il segnale può assumere, in tutti gli istanti dell'insieme di definizione, solo valori discreti (anche infiniti); nel secondo caso, il segnale può assumere un qualsiasi valore in un intervallo o in tutto l'insieme dei numeri reali.

1.1 Segnali continui

Sia $s(t)$ un segnale continuo definito su tutto l'asse reale a valori complessi (o reali).

Per i segnali continui si possono definire alcuni indici caratteristici:

area $A = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt$

valor medio $M = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t) dt$

energia $E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$

potenza $P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |s(t)|^2 dt$

Se il segnale è di energia, sicuramente $P_s = 0$; allo stesso modo, se il segnale è di potenza, allora $E_s \rightarrow +\infty$.

▷ *Affinchè un segnale abbia energia finita, deve tendere a zero per $t \rightarrow \pm \infty$.*

▷ *Un segnale periodico, non nullo, è sicuramente di potenza. È possibile calcolare la potenza di un segnale periodico con una formula più semplice:*

$$P_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt$$

1.1.1 Convoluzione, correlazione ed autocorrelazione

L'operazione di convoluzione coinvolge due segnali continui (ma anche discreti) fornendo come risultato ancora un segnale continuo. Essa verrà indicata nel seguito dal simbolo \star .

Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ complessi (o reali), il segnale $z(t)$ ricavato dalla loro convoluzione è definito nel seguente modo:

$$z(t) = x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t \leftrightarrow \tau) d\tau$$

L'operazione di convoluzione gode di numerose proprietà:

commutativa $x(t) \star y(t) = y(t) \star x(t)$

distributiva $x(t) \star (y(t) + z(t)) = x(t) \star y(t) + x(t) \star z(t)$

associativa $x(t) \star (y(t) \star z(t)) = (x(t) \star y(t)) \star z(t)$

Così come la convoluzione, anche la correlazione è un'operazione che coinvolge due segnali, fornendone un altro. Dati $x(t)$ e $y(t)$, segnali complessi (o reali), la correlazione fra questi è il segnale $z(t)$ così definito:

$$z(t) = x(t) \star y^*(\leftrightarrow) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y^*(\tau \leftrightarrow t) d\tau$$

L'autocorrelazione è semplicemente la correlazione fra due segnali identici:

$$R_x(t) = x(t) \star x^*(\leftrightarrow) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x^*(\tau \leftrightarrow t) d\tau$$

Si rimanda per maggiori dettagli sul suo significato fisico al capitolo 6.

1.2 Segnali discreti

I segnali discreti sono definiti solo in alcuni istanti ben precisi e distanziati fra loro di una quantità costante, detta *periodo*. Simbolicamente un segnale discreto è rappresentato da $s(nT)$, dove T è il periodo ed n è un numero intero relativo qualsiasi. Un segnale discreto assume un valore definito solo negli istanti di tempo nT ; negli altri istanti, il segnale è in uno stato indefinito. Generalmente il periodo T di un segnale discreto viene considerato unitario.

Anche per i segnali discreti è possibile definire alcuni indici caratterizzanti:

$$\text{area } A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T s(nT)$$

$$\text{valor medio } M = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{n=-N}^{+N} T s(nT)$$

$$\text{energia } E_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T |s(nT)|^2$$

$$\text{potenza } P_s = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{n=-N}^{+N} T |s(nT)|^2$$

È possibile definire, anche per i segnali discreti, l'operazione di convoluzione (e quindi di correlazione ed autocorrelazione). Dati due segnali discreti, $x(nT)$ e $y(nT)$, la convoluzione fra questi è il segnale $z(nT)$ così definito:

$$z(nT) = x(nT) \star y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T x(kT) y(nT \leftrightarrow kT)$$

Capitolo 2

Serie di Fourier

Sia $x(t)$ un segnale determinato e continuo con le seguenti caratteristiche:

- periodico di periodo $T \Leftrightarrow x(t + T) = x(t) \forall t \in \mathbb{R}$;
- integrabile nell'intero periodo;
- dotato di un numero finito di punti di discontinuità di terza specie.

In queste ipotesi, si può dimostrare che il segnale $x(t)$ può essere sviluppato come somma di infinite armoniche di frequenza multipla a quella

fondamentale: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi f_n t}$ con $f_n = \frac{n}{T}$.

Al variare di n , si ottengono infiniti coefficienti X_n , il cui insieme viene detto *spettro di ampiezza complessa*. Essi possono essere calcolati mediante la seguente integrazione:

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

La descrizione del segnale periodico in termini di tempo (si dice comunemente nel *dominio del tempo*) è esattamente equivalente alla descrizione in termini di coefficienti della serie di Fourier (*dominio delle frequenze*). In definitiva, è possibile passare univocamente e senza ambiguità, dal segnale $x(t)$ periodico allo spettro di ampiezza complessa $\{X_n\}$. Per questo motivo si utilizzerà la seguente simbologia per indicare l'associazione, mediante lo sviluppo in serie di *Fourier*, dei coefficienti X_n al segnale $x(t)$: $x(t) \longleftrightarrow X_n$.

Data l'equivalenza fra il segnale nel dominio del tempo, mediante la relazione funzionale $x(t)$, e nel dominio della frequenza, mediante i coefficienti dello sviluppo in serie di *Fourier* X_n , è intuitivo pensare che la potenza del

segnale possa essere calcolata conoscendo solo questi ultimi. Effettivamente vale la seguente relazione:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2$$

Questa formula è soggetta ad una interessante interpretazione: la quantità elementare della precedente sommatoria $|X_n|^2$ rappresenta la potenza associata alla singola armonica elementare $X_n e^{j2\pi f_n t}$.

La serie di *Fourier* gode di alcune proprietà:

- \rightsquigarrow Se $x(t) \longleftrightarrow X_n$, allora $y(t) = a x(t) \longleftrightarrow Y_n = a X_n$
- \rightsquigarrow Se $x(t) \longleftrightarrow X_n$ e $y(t) \longleftrightarrow Y_n$, allora $z(t) = x(t) + y(t) \longleftrightarrow Z_n = X_n + Y_n$
- \rightsquigarrow Se $x(t) \longleftrightarrow X_n$, allora $y(t) = x^*(t) \longleftrightarrow Y_n = X_{-n}^*$
- \rightsquigarrow Se $x(t) \longleftrightarrow X_n$, allora $y(t) = x(t \Leftrightarrow t_0) \longleftrightarrow Y_n = X_n e^{-j2\pi f_n t_0}$
- \rightsquigarrow Se $x(t) \longleftrightarrow X_n$, allora $y(t) = x(\Leftrightarrow t) \longleftrightarrow Y_n = X_{-n}$
- \rightsquigarrow Se $x(t) \longleftrightarrow X_n$ e $y(t) \longleftrightarrow Y_n$, allora $z(t) = x(t) \star y(t) \longleftrightarrow Z_n = X_n Y_n$
- \rightsquigarrow Se $x(t) \longleftrightarrow X_n$ e $y(t) \longleftrightarrow Y_n$, allora $z(t) = x(t) y(t) \longleftrightarrow Z_n = X_n \star Y_n$

2.1 Serie di Fourier per segnali reali

Se il segnale periodico $x(t)$ è reale, i coefficienti della serie di *Fourier* precedentemente introdotta possono comunque essere complessi. Si dimostra, però, che essi godono della seguente proprietà, detta *simmetria hermitiana*: $X_{-n} = X_n^*$. Ciò vuol dire che $\Re[X_{-n}] = \Re[X_n]$ e che $\Im[X_{-n}] = \Leftrightarrow \Im[X_n]$.

È facile dimostrare che:

$$\Re[X_n] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt$$

$$\Im[X_n] = \Leftrightarrow \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt$$

In definitiva:

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt \Leftrightarrow \frac{j}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt$$

Nel caso in cui il segnale sia pari, oltre che reale, i coefficienti della serie di *Fourier* sono tutti reali:

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt$$

Allo stesso modo, si può facilmente dimostrare che un segnale reale e dispari è dotato di coefficienti di *Fourier* tutti immaginari e si può scrivere:

$$X_n = \Leftrightarrow \frac{j}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt = \Leftrightarrow \frac{2j}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt$$

Oltre alla serie di *Fourier* esponenziale, in cui le armoniche elementari sono rappresentate dal termine esponenziale $e^{j2\pi f_n t}$, esiste anche, *solo per i segnali reali*, la serie di *Fourier* trigonometrica. Si può scrivere:

$$x(t) = R_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(2\pi f_n t) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} I_n \sin(2\pi f_n t)$$

dove

$$R_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$R_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt$$

$$I_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt$$

Capitolo 3

Trasformata di *Fourier*

Se il segnale determinato e tempo-continuo non è periodico, non è possibile trovare uno sviluppo in serie di *Fourier* convergente ad esso. Per studiarne il contenuto in frequenza si utilizza, quindi, la trasformata di *Fourier*, che ha molte caratteristiche simili alla serie.

Dato un segnale $x(t)$ di energia è possibile dimostrare la seguente relazione:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \text{dove:} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Mediante la seconda equazione è possibile ottenere la trasformata di *Fourier* $X(f)$ conoscendone il suo andamento temporale $x(t)$; mediante la prima equazione è possibile, invece, antitraformare e cioè ottenere l'andamento nel dominio del tempo $x(t)$ del segnale, conoscendone la trasformata di *Fourier* $X(f)$. Queste operazioni sono possibili univocamente e senza ambiguità dato che la descrizione del segnale in termini di relazione temporale ed in termini di trasformata di *Fourier* è perfettamente equivalente.

L'energia del segnale può quindi essere calcolata sia mediante l'espressione di $x(t)$, sia mediante l'espressione di $X(f)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

3.1 Proprietà della trasformata di *Fourier*

Le proprietà di cui gode la trasformata di *Fourier* sono molto importanti in quanto, mediante il loro opportuno utilizzo, è possibile calcolare la trasformata di *Fourier* di un qualsiasi segnale complesso a partire da segnali elementari.

↪ **del valore iniziale** Se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, allora $x(t)|_{t=0} = x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df$

$$\text{e } X(f)|_{f=0} = X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

↪ **linearità** Se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ e $y(t) \longleftrightarrow Y(f)$, allora $s(t) = ax(t) + by(t) \longleftrightarrow S(f) = aX(f) + bY(f)$

↪ **traslazione temporale** Se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, allora $y(t) = x(t \leftrightarrow t_0) \longleftrightarrow Y(f) = X(f) e^{-j2\pi f t_0}$

↪ **traslazione in frequenza** Se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, allora $y(t) = x(t) e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow Y(f) = X(f \leftrightarrow f_0)$

↪ **dualità** Se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, allora $y(t) = X(t) \longleftrightarrow Y(f) = x(\leftrightarrow f)$

↪ **di scala** Se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ allora $y(t) = x(at) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$ (con $a \neq 0$)

↪ **derivazione** Se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, allora $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow Y(f) = j2\pi f X(f)$

↪ **integrazione** Se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, allora $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow Y(f) = \frac{X(0)}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$

↪ **coniugato** Se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, allora $y(t) = x^*(t) \longleftrightarrow Y(f) = X^*(\leftrightarrow f)$

↪ **convoluzione** Se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ e $y(t) \longleftrightarrow Y(f)$, allora $z(t) = x(t) \star y(t) \longleftrightarrow Z(f) = X(f) Y(f)$

↪ **prodotto** Se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ e $y(t) \longleftrightarrow Y(f)$, allora $z(t) = x(t) y(t) \longleftrightarrow Z(f) = X(f) \star Y(f)$

3.2 Trasformata di *Fourier* per segnali reali

Se il segnale $x(t)$ è reale, la sua trasformata di *Fourier* può essere ancora complessa, ma essa gode della *simmetria hermitiana*:

$$X(\leftrightarrow f) = X^*(f) \Leftrightarrow \Re[X(\leftrightarrow f)] = \Re[X(f)] \text{ e } \Im[X(\leftrightarrow f)] = \Leftrightarrow \Im[X(f)]$$

Nel solo caso in cui il segnale $x(t)$ fosse *reale e pari*, allora la trasformata di *Fourier* sarebbe reale e anch'essa pari.

▷ Questo vuol dire che la rappresentazione della serie di Fourier su un grafico può avvenire solo nel caso in cui il segnale sia reale e pari.

Allo stesso modo, si può dimostrare che se il segnale $x(t)$ fosse reale e dispari, la trasformata di Fourier sarebbe puramente immaginaria e anch'essa dispari.

3.3 Trasformata di Fourier per segnali di potenza

L'esistenza della trasformata di Fourier è garantita solo per segnali di energia. Comunque, è possibile definire una trasformata di Fourier anche per segnali di potenza utilizzando il formalismo matematico introdotto dalla funzione impulsiva $\delta(t)$.

3.3.1 Segnali periodici

Anche per i segnali periodici si può definire una trasformata di Fourier strettamente legata alla serie di Fourier. Sia $x(t)$ un segnale periodico di periodo T_0 :

$$x(t + T_0) = x(t) \quad \forall t$$

Lo sviluppo in serie di Fourier permette di scrivere il segnale $x(t)$ come somma di armoniche elementari:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi f_n t}$$

Quindi la trasformata di Fourier del segnale è:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f \Leftrightarrow f_n)$$

La trasformata di Fourier di un segnale periodico è quindi semplicemente un treno di impulsi la cui area coincide con i coefficienti della serie di Fourier.

Inoltre, sia $x_T(t)$ il segnale $x(t)$ ristretto ad un periodo, così definito:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La trasformata di Fourier $X_T(f)$ di questo segnale è legato al segnale $x(t)$ periodico in quanto:

$$X_T(f)|_{f=f_n} = X_T(f_n) = T \cdot X_n$$

Capitolo 4

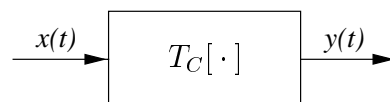
Sistemi di trasformazione di segnali

4.1 Generalità sui sistemi

Un sistema di trasformazione di un segnale è un qualsiasi oggetto reale o teorico che trasforma un segnale in ingresso $x(t)$ in un segnale in uscita $y(t)$, mediante la trasformazione $y(t) = T_C[x(t)]$. Per caratterizzare univocamente un sistema di trasformazione, sarà necessario specificare semplicemente la funzione di trasformazione $T_C[\cdot]$.

Un sistema di trasformazione di un segnale è tutt'altro che una entità astratta: esso trova numerosi riscontri pratici in molti circuiti e strumenti elettronici. Non si entrerà nei dettagli su come sia possibile, elettronicamente, la trasformazione del segnale operata dal sistema, ma si considererà il sistema a livello superiore come una *black-box* di cui si conoscono solo gli effetti e cioè il tipo di trasformazione. Per questo, l'operazione di trasformazione del segnale $x(t)$ nel segnale $y(t)$ è rappresentata nella figura seguente e si scriverà:

$$x(t) \Leftrightarrow y(t)$$



A seconda del tipo di trasformazione $T_C[\cdot]$ tipica del sistema, esso può definirsi in vari modi:

sistema lineare quando la funzione di trasformazione $T_C[\cdot]$ gode contemporaneamente della proprietà additiva e di omogeneità, cioè:

$$T_C[x(t) + y(t)] = T_C[x(t)] + T_C[y(t)]$$

$$T_C[ax(t)] = aT_C[x(t)]$$

La verifica delle precedenti due proprietà può essere fatta equivalentemente mediante la seguente:

$$T_C[ax(t) + by(t)] = aT_C[x(t)] + bT_C[y(t)]$$

sistema tempo invariante quando l'effetto del sistema non cambia col tempo. Formalmente questa proprietà può essere verificata nel seguente modo. Se $x(t) \Leftrightarrow y(t)$, allora $T_C[x(t \Leftrightarrow \tau)] = y(t \Leftrightarrow \tau)$.

sistema stabile quando ogni segnale $x(t)$ in ingresso *limitato*, si trasforma in un segnale $y(t)$ in uscita anch'esso *limitato*.

sistema causale quando la risposta del sistema all'istante t dipende *soltanto* dai valori del segnale in ingresso all'istante t e/o negli istanti precedenti.

sistema senza memoria quando la risposta del sistema all'istante di tempo t dipende dal valore dell'ingresso al medesimo istante e non dagli istanti precedenti.

sistema invertibile quando, conoscendo la risposta fornita dal sistema, è possibile ricavarne senza ambiguità il segnale in ingresso.

4.2 Sistemi lineari tempo-invarianti

Molto importanti risultano i sistemi lineari e tempo-invarianti (SLI). Per questi, la risposta all'impulso $h(t)$ caratterizza completamente il sistema.

$$\delta(t) \Leftrightarrow h(t)$$

Infatti, si può dimostrare che la risposta $y(t)$ ad un qualsiasi segnale in ingresso $x(t)$ può essere calcolata conoscendo *soltanto* la risposta all'impulso mediante la seguente formula:

$$y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t \Leftrightarrow \tau) d\tau$$

In frequenza, si può subito dimostrare che:

$$Y(f) = X(f) H(f)$$

dove $X(f)$, $Y(f)$ e $H(f)$ sono le trasformate di *Fourier* rispettivamente del segnale in ingresso $x(t)$, della risposta all'impulso $h(t)$ e del segnale in uscita $y(t)$.

Si può, inoltre, dimostrare che un SLI che sia causale è dotato di una risposta all'impulso $h(t)$ che soddisfa la seguente relazione:

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

Inoltre la condizione di stabilità di un SLI *equivale* alla assoluta integrabilità della risposta all'impulso:

$$\text{ sistema stabile } \iff \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

Infine, un sistema lineare tempo-invariante che abbia una risposta all'impulso $h(t)$ reale e che sia causale, si dice *fisicamente realizzabile*. Si dice *idealmente realizzabile* se $h(t)$ è reale.

4.3 Sistemi lineari discreti

Le stesse considerazioni fatte per un sistema per segnali continui possono rifarsi per un sistema per segnali discreti. La funzione di trasformazione $T_D[\cdot]$ viene applicata a segnale discreti $x(nT)$ definiti negli istanti di tempo discreti nT .

Anche i sistemi discreti possono classificarsi in: *lineari, tempo-invarianti, stabili, fisicamente realizzabili, ecc.*

Si può definire per i sistemi lineari tempo-invarianti la risposta all'impulso $h(nT)$ e si può dimostrare che:

$$y(nT) = x(nT) \star h(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) h[(n \leftrightarrow k)T] T$$

Quindi, anche per i sistemi lineari tempo-invarianti discreti la risposta all'impulso $h(nT)$ è caratterizzante il sistema.

Se il SLI è causale, si può dimostrare che $h(nT) = 0 \quad \forall n < 0$.

Capitolo 5

Campionamento

Il campionamento è una delle prime fasi durante la trasmissione in digitale di segnali su una qualsiasi linea di trasmissione. Fondamentalmente, mediante questa operazione, si prelevano dei campioni di un segnale tempo continuo ad intervalli regolari di periodo T (e frequenza $f_c = \frac{1}{T_c}$) e si costruisce il segnale campionato così definito:

$$s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_c) \delta(t \Leftrightarrow nT_c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t \Leftrightarrow nT_c) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t \Leftrightarrow nT_c)$$

Come si può notare dalle precedenti espressioni, il segnale campionato $s_c(t)$ altro non è che il prodotto fra il segnale $s(t)$ originale ed un treno di impulsi unitari $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t \Leftrightarrow nT_c)$, tutti applicati negli istanti di campionamento.

Nel dominio della frequenza, la trasformata di *Fourier* del segnale campionato $s_c(t)$ è:

$$S_c(f) = S(f) \star \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f \Leftrightarrow \frac{n}{T_c}\right) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(f \Leftrightarrow \frac{n}{T_c}\right)$$

In definitiva, lo spettro in frequenza del segnale campionato è dato dalla somma di uno stesso spettro, pari a quello del segnale di partenza, traslato nelle frequenze $\frac{n}{T_c} = n f_c$ e attenuato di un fattore T_c .

Quindi, per poter ricostruire il segnale $s(t)$ dal segnale $s_c(t)$, basta riottenere lo spettro originale; ciò è possibile eliminando tutti eccetto quello centrato nell'origine. Affinché questa operazione riesca è necessario, però, che:

- il segnale $s(t)$ abbia uno spettro in frequenza limitato, per esempio nell'intervallo $[\Leftrightarrow w, +w]$;

- la frequenza di campionamento sia almeno pari al doppio di w .

A questo punto, per riottenere il segnale $s(t)$ partendo dal segnale $s_c(t)$, basta moltiplicare in frequenza $S_c(f)$ con un rettangolo (filtro passa-basso) in modo da eliminare gli spettri superflui. La frequenza di taglio f_s del filtro, deve essere maggiore di w (per evitare di tagliare anche lo spettro originale) e minore di $f_c \Leftrightarrow w$ (per eliminare completamente gli altri spettri).

$$w \leq f_s \leq f_c \Leftrightarrow w$$

Dopo questa operazione si ottiene il segnale ricostruito $s_r(t)$ che, nelle ipotesi precedentemente fatte, coincide perfettamente con il segnale originale $s(t)$:

$$s_r(t) \longleftrightarrow S_r(f) = S_c(f) T_c \operatorname{rect} \left(\frac{f}{2f_s} \right)$$

Dalla formula precedente, antitrasformando, si ottiene l'espressione nel tempo del segnale ricostruito $s_r(t)$ a partire dai campioni $s(nT_c)$:

$$s_r(t) = 2 f_s T_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_c) \operatorname{sinc}[2f_s(t \Leftrightarrow nT_c)]$$

La precedente formula è conosciuta come *teorema del campionamento*.

Nel caso in cui la frequenza di campionamento fosse proprio il doppio della semiampiezza di banda del segnale (cioè $f_c = 2w$), nelle cosiddette ipotesi di *Nyquist*, il teorema del campionamento prende questo aspetto:

$$s_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s \left(\frac{n}{2w} \right) \operatorname{sinc} \left[2w \left(t \Leftrightarrow \frac{n}{2w} \right) \right]$$

Ovviamente, nelle ipotesi di *Nyquist*, la frequenza di taglio del filtro al ricevitore deve necessariamente coincidere con la metà della frequenza di campionamento: $f_s = \frac{f_c}{2} = w$.

Nelle ipotesi di campionamento ideale e quindi di segnale perfettamente ricostruibile dai campioni ($s_r(t) = s(t)$), la conoscenza dei soli campioni $s(nT_c)$ permette una descrizione *completa* di tutto il segnale in tutti gli istanti di tempo. Per esempio, è possibile calcolare l'energia del segnale dalla conoscenza dei soli campioni pur ignorando i valori del segnale negli altri istanti di tempo, mediante la seguente formula:

$$E_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_c |s(nT_c)|^2$$

Capitolo 6

Autocorrelazione

6.1 Segnali di energia

Sia $x(t)$ un segnale ad energia finita. Questa può essere calcolata facilmente con le due formule seguenti, una nel dominio del tempo, l'altra nel dominio della frequenza:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

L'ultima di queste espressioni può essere interpretata nel seguente modo: la quantità $|X(f)|^2$ rappresenta la densità di energia del segnale per gamma di frequenza. Questa definizione è coerente col nome di *densità* di energia se sono verificate entrambe le seguenti relazioni:

- L'energia del segnale $x(t)$ può essere calcolata dalla densità di energia integrando su tutto lo spettro in frequenza: $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$
- L'energia associata al segnale $x(t)$ *limitatamente* alle frequenze comprese fra f_1 e f_2 è pari all'integrale della densità di energia sull'intervallo di frequenze di interesse: $E_x[f_1, f_2] = \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$

Si può dimostrare la validità delle precedenti proprietà da cui il nome di *densità di energia* alla funzione $|X(f)|^2$.

Poiché la densità di energia $|X(f)|^2$ di un segnale energetico $x(t)$ è un segnale nel dominio della frequenza, esso può essere considerato come una trasformata di *Fourier* di un segnale nel dominio del tempo che si definisce *autocorrelazione* $R_x(t)$.

$$R_x(t) \longleftrightarrow |X(f)|^2$$

Essendo $|X(f)|^2 = X(f) X^*(f)$, l'autocorrelazione può essere calcolata a partire direttamente dal segnale $x(t)$ nel dominio del tempo dalla seguente relazione:

$$R_x(t) = x(t) \star x^*(\leftrightarrow t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x^*(\tau \leftrightarrow t) d\tau$$

L'autocorrelazione gode di alcune interessanti proprietà:

- $R_x(t)|_{t=0} = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x^*(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = E_x$
- $|R_x(t)| \leq R_x(t)|_{t=0} = R_x(0) = E_x$
- Se il segnale è reale, allora l'autocorrelazione (e quindi anche la densità di energia) è un segnale reale e pari
- Sia $y(t)$ l'uscita di un SLI con all'ingresso il segnale $x(t)$. Esiste un legame tra l'autocorrelazione del segnale in ingresso e quello in uscita: $R_y(t) = R_x(t) \star R_h(t) = R_x(t) \star h(t) \star h(\leftrightarrow t)$, supponendo $h(t)$ reale.

6.2 Segnali di potenza

Le stesse considerazioni fatte precedentemente per i segnali di energia, possono rifarsi anche per i segnali di potenza con opportune modifiche. In particolare, per i segnali di potenza è assicurata la convergenza del seguente integrale detto, appunto, *potenza* del segnale:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

Quindi, in modo simile ai segnali di energia, si definisce autocorrelazione di un segnale di potenza $x(t)$ la seguente quantità:

$$R_x(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(\tau) x^*(\tau \leftrightarrow t) d\tau$$

Questo limite sicuramente converge per i segnali di potenza.

La trasformata di *Fourier* dell'autocorrelazione, indicata con $S_x(f)$, rappresenta, invece, la densità di potenza del segnale $x(t)$.

$$R_x(t) \longleftrightarrow S_x(f)$$

Quest'ultima è effettivamente una densità di potenza dato che gode delle seguenti proprietà:

- $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$
- $P_x[f_1, f_2] = \int_{f_1}^{f_2} S_x(f) df$

Inoltre:

- $R_x(t)|_{t=0} = R_x(0) = P_x$

Esiste un legame fra l'autocorrelazione di un segnale di potenza e quella del segnale di energia ricavato dalla sua restrizione all'intervallo $[\Leftrightarrow T, T]$. Si può dimostrare che:

$$R_x(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{R_{x_T}(t)}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x_T^*(t) dt$$

dove:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |T| < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

6.3 Segnali periodici

Le stesse considerazioni fatte per i segnali di potenza, sono valide, senza nessuna modifica, anche per i segnali periodici che sono dei particolari segnali di potenza. Poiché questi godono della importante proprietà che $x(t+T_0) = x(t)$ per un particolare numero reale T_0 detto periodo, le formule dell'autocorrelazione definite precedentemente per i segnali di potenza possono essere notevolmente semplificate per i segnali periodici.

In particolare si può dimostrare che l'autocorrelazione $R_x(t)$ di un segnale periodico $x(t)$ di periodo T_0 può essere calcolata nel seguente modo:

$$R_x(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau) x^*(\tau \Leftrightarrow t) d\tau$$

evitando, così, l'operazione di limite.

Dato che un segnale periodico $x(t)$ è descrivibile *in toto* dai suoi coefficienti della serie di *Fourier*, è lecito domandarsi se è possibile calcolare l'autocorrelazione conoscendo solo questi coefficienti. Si può effettivamente dimostrare la seguente relazione:

$$R_x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 e^{j2\pi f_n t}$$

La densità di potenza di un segnale periodico è quindi semplicemente:

$$S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \delta(f \Leftrightarrow f_n)$$

Capitolo 7

Trasformata di *Fourier* per segnali discreti

7.1 Segnali di energia

Anche per i segnali discreti $x(nT)$ definiti solo in alcuni istanti di tempo è possibile ottenere una trasformazione invertibile univocamente che dia informazioni sul contenuto in frequenza del segnale. Si può dimostrare, a partire dallo spettro in frequenza di un segnale campionato, che il segnale discreto $x(nT)$ può scriversi come:

$$x(nT) = \int_{-F/2}^{+F/2} X(f) e^{j2\pi f nT} df$$

dove $X(f)$ è proprio la trasformata di *Fourier* del segnale discreto che può essere calcolata nel seguente modo:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T x(nT) e^{-j2\pi f nT}$$

È bene notare come, pur essendo il segnale $x(nT)$ discreto, il suo contenuto in frequenza è descritto da una trasformata $X(f)$ continua nel dominio della frequenza. Però, a differenza di una trasformata di *Fourier* di un segnale continuo, si può dimostrare che la trasformata di *Fourier* di un segnale discreto è periodica di periodo $F = \frac{1}{T}$:

$$X(f + F) = X(f) \quad \forall f$$

La trasformata di *Fourier* di un segnale discreto gode di proprietà del tutto simili a quelle tipiche di una trasformata per segnali continui. Per esempio,

è possibile calcolare l'energia del segnale discreto dalla sua trasformata:

$$E_x = \int_{-F/2}^{+F/2} |X(f)|^2 df$$

7.2 Caso particolare di segnali di potenza: segnali periodici

Così come è stato possibile generalizzare la trasformata di *Fourier* per segnali di potenza partendo da quella per segnali di energia nel campo dei segnali tempo-continui, è possibile definire una trasformata di *Fourier* anche per segnali di potenza e discreti. Verranno trattati soltanto alcuni particolari segnali discreti di potenza e cioè i segnali periodici, per i quali:

$$x(nT + NT) = x(nT) \quad \forall n$$

La quantità $T_p = NT$ è detta periodo del segnale.

Si può dimostrare la validità della seguente coppia di equazioni di trasformazione ed antitrasformazione:

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \Rightarrow x(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} F S(kF) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$d_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \Rightarrow S(kF) = \sum_{n=0}^{N-1} T x(nT) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

... dove $F = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p}$.

In questo caso, sia il segnale che la trasformata sono segnali discreti.

L'importanza di questo tipo di trasformata di *Fourier* risiede nella semplicità computazionale insita nelle formule precedenti: infatti è questo l'unico caso in cui è possibile trasformare o antitrasformare il segnale con una sommatoria discreta e finita di termini, operazione facilmente implementabile in un elaboratore.

Come al solito, è possibile calcolare la potenza del segnale periodico e discreto sia mediante una sommatoria nel dominio del tempo, sia nel dominio della frequenza:

$$P_x = F^2 \sum_{k=0}^{N-1} |S(kF)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(nT)|^2$$

Capitolo 8

Trasformata di *Hilbert*

L'operazione di trasformazione secondo *Hilbert* può essere rappresentata come un SLI con una funzione di trasferimento pari a:

$$H(f) = \begin{cases} j & f < 0 \\ 0 & f = 0 \\ \Leftrightarrow j & f > 0 \end{cases} = \Leftrightarrow j \operatorname{sign}(f)$$

È facile dimostrare che la risposta all'impulso è:

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

Questo vuol dire che la trasformata di *Hilbert* provoca uno sfasamento di 90° su ogni componente in frequenza negativa e di $\Leftrightarrow 90^\circ$ su ogni componente in frequenza positiva. La componente costante del segnale viene completamente annullata.

Sia $x(t)$ un segnale determinato e si indichi $\tilde{x}(t)$ la sua trasformata di *Hilbert* e cioè:

$$\tilde{X}(f) = X(f) H(f)$$

Nel dominio del tempo si può scrivere:

$$\tilde{x}(t) = x(t) \star h(t) = x(t) \star \frac{1}{\pi t}$$

▷ *La trasformata di Hilbert di un segnale reale è un segnale reale.*

Parte II

Segnali aleatori

Capitolo 9

Processi stocastici

I processi stocastici sono una naturale generalizzazione di una variabile aleatoria. Così come, per definire una variabile aleatoria è necessario associare ad ogni evento elementare un numero reale, per definire un processo stocastico si deve associare ad ogni evento elementare una funzione reale nel dominio del tempo, che descrive una evoluzione temporale dell'esperimento casuale.

La descrizione del processo può avvenire fissando arbitrariamente un istante di tempo ed estraendo la variabile aleatoria associata $X(t)$. Di questa, si può calcolare la funzione distribuzione, funzione densità e tutti gli altri indici di una variabile aleatoria.

È anche possibile fissare due o più istanti di tempo t_1, t_2, \dots, t_n e descrivere la funzione distribuzione congiunta:

$$F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

▷ *Nella maggior parte dei casi è sufficiente una descrizione in potenza del processo che si arresta ad una coppia di variabili estratte in due istanti di tempo.*

9.1 Processi stazionari

Una classe molto importante di processi stocastici è quella dei processi stazionari che, da un punto di vista intuitivo, rappresentano quei processi invarianti ad un cambiamento dell'istante di riferimento.

Formalmente, un processo si dice *stazionario in senso stretto* quando, fissati n istanti di tempo t_1, t_2, \dots, t_n , risulta:

$$F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_n+\tau)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

La stazionarietà stretta di un processo comporta due importanti proprietà:

- il valor medio del processo stocastico $E[X(t)]$ è indipendente dall'istante di tempo;
- l'autocorrelazione delle due variabili estratte $X(t_1)$ e $X(t_2)$ dipende soltanto dalla differenza degli istanti di tempo $\tau = t_2 \Leftrightarrow t_1$ e non dai due istanti di tempo indipendentemente.

Un processo è, invece, *stazionario in senso lato* quando soddisfa semplicemente le due proprietà precedenti.

▷ Come si può immaginare intuitivamente, un processo stazionario in senso lato è anche stazionario in senso stretto. Non è vero il viceversa.

Se un processo è stazionario, allora la funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ che dipende soltanto dal tempo, è dotata di trasformata di Fourier $S_x(f)$ definita come *densità spettrale di potenza*. Essa, infatti, rappresenta la potenza $E[X^2(t)]$ del processo per gamma di frequenza.

9.2 Ergodicità di un processo

I processi ergodici sono molto importanti perché godono di proprietà interessanti dal punto di vista pratico. Per essi, infatti, la misura di una *sola* realizzazione permette di stimare, *senza errore*, il valor medio di tutto il processo.

Sia $x(t)$ una singola realizzazione di un processo. Si definisce media temporale della realizzazione $m = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt$. È quindi possibile associare ad ogni realizzazione dell'esperimento, un numero reale che rappresenta la sua media temporale. In questo modo è possibile definire una variabile aleatoria M che, per i processi ergodici, ha la seguente caratteristica:

$$p(M = m_x) = 1$$

dove $m_x = E[X(t)]$.

Affinchè la precedente relazione sia vera, deve accadere che il valor medio del processo m_x sia indipendente dall'istante di tempo t .

Per i processi stazionari, si dimostra che la ergodicità in media può essere verificata nel seguente modo:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2T}\right) c_x(\alpha) d\alpha = 0$$

dove $c_x(\tau)$ rappresenta l'autocovarianza del processo.

9.3 Filtraggio di un processo stocastico stazionario

Se il processo stocastico in ingresso $X(t)$ ad un filtro lineare e tempo-invariante è stazionario in senso lato, si può dimostrare che anche il processo stocastico in uscita $Y(t)$ risulta essere stazionario in senso lato. Inoltre risulta:

$$E[Y(t)] = E[X(t)] H(f)|_{f=0} = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \star h(\tau) \star h(\leftrightarrow\tau)$$

dove $h(t)$ è la risposta all'impulso del sistema e $H(f)$ rappresenta la sua funzione di trasferimento.

Ovviamente in frequenza si ha:

$$S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2$$

Capitolo 10

Catene di *Markov*

Un processo stocastico si dice *Markoviano* o di *Markov*, quando la sua evoluzione futura dipende *soltanto* dallo stato del processo all'istante t e non dagli istanti precedenti. In formule, un processo è di *Markov* quando la seguente probabilità congiunta può scriversi:

$$\begin{aligned} p(X(t_n) = A_n, X(t_{n-1}) = A_{n-1}, \dots, X(t_1) = A_1, X(t_0) = A_0) = \\ = p(X(t_n) = A_n | X(t_{n-1}) = A_{n-1}) \cdot \dots \cdot p(X(t_0) = A_0) \end{aligned}$$

dove i termini t_0, t_1, \dots, t_n rappresentano n istanti di tempo e i termini A_i rappresentano dei possibili valori assunti dal processo nell'istante t_i .

Un processo di *Markov* è detto *catena di Markov* se i valori assunti dal processo sono discreti (finiti o infiniti numerabili).

10.1 Catene di *Markov* tempo-discrete

Una catena di *Markov* è tempo-discreta quando gli istanti di tempo in cui il processo evolve sono discreti. Un processo di questo tipo può essere il modello di un sistema che può assumere un certo numero discreto di stati, cambiandolo solo in istanti di tempo definiti e discreti. Siano, quindi, $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ l'insieme degli stati del sistema.

La probabilità congiunta di cui sopra può scriversi nel seguente modo:

$$\begin{aligned} p(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \\ p(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \cdot \dots \cdot p(X_0 = x_0) \end{aligned}$$

dove il generico termine x_i rappresenta uno degli stati possibili s_i .

Per descrivere una catena di *Markov* tempo-discreta si utilizzano le *probabilità di transizione ad un passo* che rappresentano la probabilità che il

sistema cambi dallo stato i allo stato j in un solo passo.

$$p(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

In generale, questa probabilità è una funzione complessa degli stati iniziale e finale i e j e anche del passo n . Quando essa è indipendente dal passo n , allora la catena di *Markov* si dice *omogenea*. È coerente, quindi la seguente simbologia:

$$p(X_n = j | X_{n-1} = i) = p_{i,j}$$

Al variare di i e di j si può quindi definire una *matrice di probabilità di transizione ad un passo* il cui elemento generico è proprio la probabilità di transizione ad un passo da un particolare stato ad un altro.

▷ Una particolarità di questa matrice è che la somma degli elementi di ogni riga è pari ad 1. Non è vero per gli elementi delle colonne.

Si può definire anche una *matrice di probabilità di transizione ad n passi* e si può dimostrare che:

$$P_n = P^n$$

essendo P_n proprio questa matrice.

Inoltre, definendo p_n il *vettore di stato* del sistema al passo n , contenente le probabilità di stato $p_i(n) = p(X(n) = i)$. Si può dimostrare che sussiste la seguente relazione:

$$p_n = p_{n-1} P = p_0 P^n$$

Si definisce, invece, $\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ la *probabilità asintotica* che rappresenta come il sistema si assesta col passare del tempo. In molti casi è più semplice calcolare la probabilità asintotica anziché la probabilità di stato al passo n .

Se la catena di *Markov* è dotata di probabilità asintotica, esiste il limite che la definisce, essa si dice *regolare*. È, invece, *completamente regolare* quando questa probabilità è indipendente dal vettore delle probabilità di stato al passo 0, cioè da p_0 .

Nel caso la catena di *Markov* sia completamente regolare, si può utilizzare una formula molto semplice per il calcolo della probabilità asintotica:

$$\pi(P \Leftrightarrow I) = 0$$

che rappresenta un sistema lineare che ammette *sicuramente* infinite soluzioni. L'ulteriore condizione è la seguente:

$$\sum_i \pi_i = 1$$

10.2 Catene di *Markov* tempo-continue

Una catena di *Markov* è tempo-continua quando lo stato del sistema può cambiare in un istante qualsiasi di tempo e, ovviamente, dalla definizione di un processo *markoviano*, la conoscenza dello stato in un certo istante, permette lo studio dell'evoluzione futura del sistema.

Una catena di *Markov* tempo-continua si dice *omogenea* quando:

$$p(X(t_n) = i | X(t_n \leftrightarrow t) = j) = p_{j,i}(t)$$

è una quantità che dipende dagli stati estremi e dalla differenza t degli istanti di estrazione.

Così come per una catena di *Markov* tempo-discreta, è possibile definire una matrice di probabilità di stato all'istante t , il cui elemento generico è proprio $p_{j,i}(t)$. Ogni elemento della matrice è una funzione, più o meno complessa, del tempo.

Lo studio di questo tipo di processi viene in genere effettuato mediante la definizione delle *frequenze di transizione* $\gamma_{i,j}$ ($i \neq j$) che rappresentano il numero medio di transizione dallo stato i allo stato j nell'unità di tempo. Si pone, invece, $\gamma_{i,i}$ la frequenza di *abbandono* dallo stato i , il numero medio di volte che, nell'unità di tempo, si lascia lo stato i .

Si dimostrano le seguenti due proprietà:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{p_{i,i}(\delta) - 1}{\delta} = -\gamma_{i,i}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{p_{i,j}(\delta)}{\delta} = \gamma_{i,j}$$

dove $p_{i,j}(t)$ rappresenta la probabilità che il sistema passi dallo stato i allo stato j in un intervallo di tempo t e $p_{i,i}(t)$ rappresenta la probabilità che il sistema passi dallo stato i allo stato i in un intervallo di tempo t (permanendo nello stesso stato oppure mediante transizioni intermedie).

▷ Queste due proprietà possono essere utilizzate per il calcolo delle frequenze γ .

Per il calcolo della probabilità che il sistema assuma un certo stato j all'istante t , $p(X(t) = j) = p_j(t)$, si deve risolvere un sistema di equazioni differenziali dove le funzioni nel tempo che bisogna calcolare sono proprio le probabilità $p_j(t)$.

$$\frac{d}{dt} p_j(t) = \sum_i \gamma_{i,j} p_i(t)$$

Per risolvere questo sistema di equazioni differenziali è necessario una condizione al contorno, come la seguente:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} p_j(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_i \gamma_{i,j} p_i = 0$$

dove $p_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_i(t)$. Questa condizione al contorno può anche essere scritta in un altro modo:

$$\sum_{i \neq j} \gamma_{i,j} p_i = p_j \sum_{i \neq j} \gamma_{j,i}$$

Parte III

Trasmissione del segnale

Capitolo 11

Codifica di canale

11.1 Generalità sulla codifica del canale

La trasmissione di un segnale digitale, che altro non è che una sequenza più o meno lunga di bit, avviene attraverso un canale di trasmissione mediante varie tecniche. Teoricamente, ci aspettiamo che ad ogni bit 1 emesso dalla sorgente a monte, ci sia un bit 1 rilevato dal ricevitore a valle del canale. Allo stesso modo, ad ogni bit 0 trasmesso, ci sia un bit 0 ricevuto.

La situazione appena descritta è però fortemente ideale poiché ogni canale reale non garantisce l'esatta trasmissione di *ogni* bit, ma è sempre maggiore di zero la probabilità che il bit 1 possa “arrivare” come uno 0 e, viceversa, un bit 0 possa essere trasmesso come bit 1. Ciò è causato da vari motivi (rumore termico, perturbazioni, ecc.) che non verranno approfonditi.

Per caratterizzare il canale da questo punto di vista, si introducono le *probabilità di transizione* che rappresentano le probabilità che ci sia un errore nella trasmissione del bit. Evidentemente esistono due probabilità di transizione: $p(1R|0T)$ e $p(0R|1T)$, essendo 1R e 0R gli eventi corrispondenti alla ricezione di un bit 1 e 0 rispettivamente, e 1T e 0T gli eventi corrispondenti alla trasmissione di un bit 1 e 0 rispettivamente (figure 11.1).

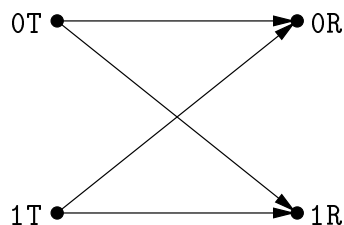


Figura 11.1: Rappresentazione schematica delle probabilità di transizione di un canale binario

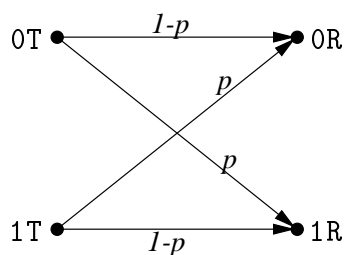


Figura 11.2: Rappresentazione schematica delle probabilità di transizione di un canale binario simmetrico (CBS)

Si definisce probabilità di errore, la probabilità dell'evento corrispondente alla trasmissione errata di un bit qualsiasi:

$$p(\mathbf{E}) = p(1\mathbf{R}, 0\mathbf{T}) + p(0\mathbf{R}, 1\mathbf{T}) = p(1\mathbf{R}|0\mathbf{T})p(0\mathbf{T}) + p(0\mathbf{R}|1\mathbf{T})p(1\mathbf{T})$$

dove si riconoscono immediatamente le probabilità di transizione tipiche del canale. Ovviamente per calcolare numericamente la probabilità di errore è necessario conoscere statisticamente la sorgente. Supponendo che la sorgente emetta i due bit in modo equiprobabile, allora la probabilità di errore diventa:

$$p(\mathbf{E}) = \frac{p(1\mathbf{R}|0\mathbf{T}) + p(0\mathbf{R}|1\mathbf{T})}{2}$$

Un caso molto particolare avviene quando le probabilità di transizione per i due bit sono uguali.

$$p(1\mathbf{R}|0\mathbf{T}) = p(0\mathbf{R}|1\mathbf{T}) = p$$

Questo rende simmetrica la possibilità, da parte del canale, di eseguire una trasmissione errata. In questo caso, il canale viene chiamato *canale binario simmetrico* CBS (figura 11.2). Per un CBS la probabilità di errore è pari alla probabilità di transizione:

$$p(\mathbf{E}) = p$$

Per migliorare la qualità di trasmissione e rendere minima la probabilità di errore, sono possibili due soluzioni:

- utilizzare un canale di trasmissione altamente efficiente, con delle probabilità di transizioni molto basse (a dispetto del costo di tutto l'apparato)
- utilizzare delle tecniche di codifica del canale che, aggiungendo dei *bit di servizio* al segnale da trasmettere, lo protegge da eventuali errori nella trasmissione (a dispetto della velocità di trasmissione)

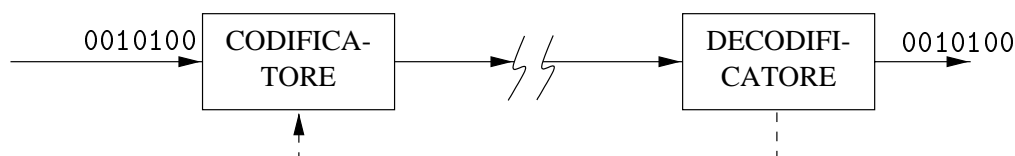


Figura 11.3: Trasmissione di un segnale digitale su un sistema di trasmissione con codifica di canale

Un sistema che fa uso della tecnica di codifica è dotato di un *codificatore* a monte del canale e di un *decodificatore* a valle (figura 11.3). Durante la fase di codifica, il codificatore produce la sequenza di bit necessaria alla “protezione” dei dati binari. Dopo la trasmissione, il decodificatore si preoccupa di verificare eventualmente la riuscita della trasmissione, di richiedere la ritrasmissione oppure di mandare la sequenza di bit ricevuta all’utente.

Esistono principalmente due tecniche di codifica del canale:

a correzione d’errore il ricevitore non solo si accorge di un eventuale errore in un certo pacchetto di bit, ma riesce anche a prendere delle decisioni, mediante un apposito algoritmo, per correggerlo

a rilevazione d’errore il ricevitore si accorge soltanto di un eventuale errore presente nel pacchetto di bit ricevuto ma non riesce a correggerlo. L’unico modo per continuare la trasmissione è richiedere la trasmissione del pacchetto incriminato.

Nel seguito verranno descritte due tecniche di codifica del canale: una a correzione d’errore (*codifica a ripetizione*) ed una a rilevazione d’errore (*controllo di parità*).

11.2 Codifica a ripetizione

Mediante questa tecnica il segnale digitale da trasmettere viene “protetto” trasmettendo ogni bit un numero dispari di volte ($2n + 1$). In questo modo, il decodificatore divide la sequenza di bit in pacchetti da $2n + 1$ bit e, per ogni pacchetto, sceglierà un solo bit che è quello maggiormente presente.

È facile capire che il decodificatore riuscirà a correggere bene eventuali errori di trasmissione solo essi variano da 0 a n . Se più di n bit sono stati trasmessi erroneamente, il ricevitore avrà un comportamento errato.

Sia RE l’evento corrispondente ad una ricezione errata e RC l’evento cor-

rispondente ad una ricezione corretta; si dimostra che:

$$p(\text{RC}) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} p^k (1 \Leftrightarrow p)^{2n+1-k}$$

$$p(\text{RE}) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} p^k (1 \Leftrightarrow p)^{2n+1-k}$$

In questo modo, se $p \rightarrow 0$ e $n \gg 1$, allora $p(\text{RE}) \ll p$.

11.3 Codifica a controllo di parità

Questa è una delle tecniche di codifica più diffuse ed è a rilevazione d'errore. Il codificatore raggruppa i bit da trasmettere in pacchetti da $2n \Leftrightarrow 1$ bit e ne aggiunge, per ognuno, un bit di servizio, detto *bit di parità*, in modo tale che ogni pacchetto, da $2n$ bit, contenga un numero pari di bit ad 1 (o 0).

Il decodificatore, allo stesso modo, raggruppa i bit in pacchetti da $2n$ bit e conta, per ognuno di essi, il numero di bit ad 1: se essi sono in numero pari, suppone che tutto il pacchetto sia stato trasmesso esattamente e lo manda, eliminando il bit di parità, all'utente; se, invece, il numero di bit ad 1 è dispari, suppone che tutto il pacchetto sia errato e, non potendo correggere l'errore, ne chiede la ritrasmissione al codificatore, attraverso una apposita linea di servizio.

In corrispondenza del decodificatore possono avvenire 3 eventi: **RL** quando si è rilevato un errore (il numero di bit ad 1 è dispari nel pacchetto); **RC** quando tutti i bit sono stati trasmessi correttamente; **RE** quando il numero di bit ad 1 è sempre pari ma nella sequenza di bit trasmessa c'è stato comunque qualche errore. Si può dimostrare che:

$$p(\text{RL}) = \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k \Leftrightarrow 1} p^{2k-1} (1 \Leftrightarrow p)^{2n-2k+1}$$

$$p(\text{RC}) = (1 \Leftrightarrow p)^{2n}$$

$$p(\text{RE}) = \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k} p^{2k} (1 \Leftrightarrow p)^{2n-2k}$$

Poiché il decodificatore, se rileva un errore, chiede la ritrasmissione dello stesso pacchetto, teoricamente anche infinite volte, in corrispondenza dell'utente esistono due soli eventi: **RCU** quando i bit in entrata sono stati trasmessi tutti correttamente e **REU** quando i bit ricevuti sono diversi da quelli

originariamente trasmessi. Si può dimostrare che:

$$p(\text{REU}) = \frac{p(\text{RE})}{1 \leftrightarrow p(\text{RL})}$$

$$p(\text{RCU}) = \frac{p(\text{RC})}{1 \leftrightarrow p(\text{RL})}$$

Inoltre, si può dimostrare che il numero medio di volte che ogni pacchetto deve essere trasmesso è pari a:

$$E[n_T] = \frac{1}{1 \leftrightarrow p(\text{RL})}$$

uno in più del numero medio delle *ritrasmissioni*.

Capitolo 12

Quantizzazione

In un sistema di trasmissione digitale, attraverso un canale binario, è necessario campionare un segnale analogico $s(t)$ in modo da trasmettere, per ogni campione $s(nT_c)$, il suo valore come sequenza di bit. Il numero di bit per ogni campione è, naturalmente, fissato e soprattutto finito. Per questo motivo, solo un numero limitato di valori, pari a 2^b (se b è il numero di bit per ogni campione), può essere trasmesso attraverso il canale. Quindi è necessaria una fase di *quantizzazione* durante la quale il valore di ogni campione, in genere un qualsiasi numero reale compreso nell'intervallo $[\Leftrightarrow a, +a]$, viene trasformato in uno dei numeri reali che è possibile trasmettere, chiamato *valore quantizzato* del campione.

La più semplice quantizzazione possibile è quella uniforme: essa consiste nel dividere l'intervallo $[\Leftrightarrow a, +a]$ in $n = 2^b$ intervallini di uguale ampiezza pari a $\Delta = \frac{2a}{n}$. Siano:

$$\Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = +a$$

gli estremi di ogni intervallino. Evidentemente risulta: $x_i = \Leftrightarrow a + \Delta i$. L'algoritmo di quantizzazione relativo associa ad ogni campione $s(nT_c) \in [\Leftrightarrow a, +a]$ il punto medio dell'intervallino $[x_i, x_{i+1}]$ a cui appartiene il campione. In altre parole, il valore quantizzato del campione $s(nT_c)$ è:

$$s_q(nT_c) = m_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

dove risulta: $s(nT_c) \in [x_i, x_{i+1}]$.

La fase di quantizzazione introduce, ovviamente, un errore irreversibile che non può essere eliminato dal ricevitore. L'errore di quantizzazione, è $e_q(nT_c) = s(nT_c) \Leftrightarrow s_q(nT_c)$.

Per quantificare con precisione l'errore dovuto alla quantizzazione è necessario conoscere il segnale da trasmettere. Come si può ben capire, l'errore

dipende direttamente dal segnale trasmesso. Pur non conoscendo il segnale è, comunque, possibile fornire un risultato statistico sull'errore di quantizzazione supponendo di considerare il numero reale $s(nT_c) = X$ come una variabile casuale distribuita con una funzione densità di probabilità $f_x(x)$. Si può quindi calcolare il seguente rapporto:

$$\frac{S}{N} = \frac{E[s^2(nT_c)]}{E[(s(nT_c) \Leftrightarrow s_q(nT_c))^2]} = \frac{E[X^2]}{E[(X \Leftrightarrow X_q)^2]}$$

dove X_q rappresenta la variabile casuale, dipendente da X , che associa al campione $s(nT_c)$, il suo valore quantizzato $s_q(nT_c)$. Questo rapporto segnale/rumore rappresenta la bontà dell'operazione di quantizzazione: quanto più grande è l'indice, tanto più basso è l'errore introdotto dalla quantizzazione. Il precedente rapporto potrà essere calcolato con le seguenti formule:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x) dx$$

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} (x \Leftrightarrow x_q)^2 f_x(x) dx$$

Per calcolare queste due quantità è necessario, però, descrivere statisticamente il segnale da trasmettere mediante la sua funzione densità di probabilità.

Nel caso in cui il segnale $s(t)$ fosse assimilabile ad una variabile casuale uniformemente distribuita nell'intervallo $[-a, +a]$ e che la quantizzazione fosse uniforme nello stesso intervallo, si può dimostrare che:

$$\frac{S}{N} = 2^{2b}$$

con b numero di bit utilizzati per ogni campione. Lo stesso indice può essere anche definito in *decibel*:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{N} \right) = 10 \log_{10} 2^{2b} = 20 n \log_{10} 2 \approx 6.02 n [dB]$$

Per ottimizzare, cioè massimizzare, il rapporto segnale/rumore dovuto alla quantizzazione è possibile utilizzare delle quantizzazioni non uniformi a seconda della distribuzione statistica del segnale da trasmettere. È intuitivo pensare che la quantizzazione debba essere più "fitta" laddove il segnale è altamente probabile, e più "rada" dove il segnale è poco probabile. Nella maggior parte dei casi, però, non si conosce la densità di probabilità del segnale e, per questo, è difficile ottimizzare il fattore segnale/rumore.

Nella telefonia, per esempio, si utilizza una *quantizzazione logaritmica* mediante particolari algoritmi di quantizzazione che garantiscono, non tanto la ottimizzazione del rapporto segnale/rumore, quanto la uniformità nell'errore per tutti i timbri di voce.

Capitolo 13

Problemi connessi alla trasmissione digitale di segnali

Un tipico sistema di trasmissione digitale è rappresentato in figura 13.1.

Il segnale analogico $s(t)$ viene campionato mediante il **campionatore**, successivamente quantizzato, attraverso un **quantizzatore** e quindi trasmesso attraverso il **canale binario**. A seconda della sicurezza del canale è possibile codificare il segnale mediante il **codificatore** prima della trasmissione e tramite un **decodificatore** successivamente, dopo la trasmissione. La sequenza di bit in arrivo viene utilizzata dall'**interpolatore** per ricostruire il segnale di partenza.

A livello teorico la fase di campionamento e di interpolazione è stata trattata nel capitolo 5, mentre la fase di quantizzazione nel capitolo 12. La codifica di canale è stata trattata nel capitolo 11.

La situazione reale è, però, nella maggior parte dei casi molto diversa dalla teoria. Esistono, cioè, numerosi problemi legati alla trasmissione digitale di un segnale dovuti principalmente al fatto che, realmente, i blocchi logici del sistema sono dei circuiti elettronici e che i segnali da trasmettere sono finiti nel tempo. Di seguito riportiamo brevemente i più importanti problemi legati alla trasmissione numerica di un segnale.

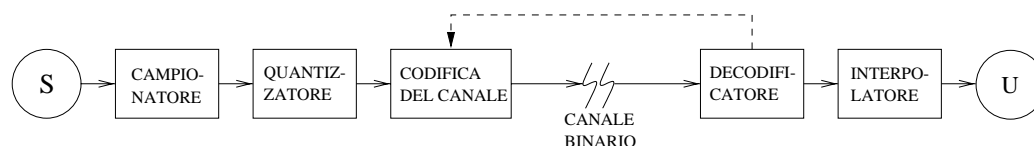


Figura 13.1: Rappresentazione di un sistema di trasmissione digitale

13.1 Campionatore

Il campionatore a livello teorico dovrebbe impedire il passaggio del segnale in *tutti* gli istanti di tempo eccetto che negli istanti di campionamento nT_c . Questo corrisponde (vedi il capitolo 5) a moltiplicare il segnale da campionare con un treno di impulsi $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t \Leftrightarrow nT_c)$. Fisicamente, con la circuiteria a disposizione, non è possibile creare un campionatore del genere poiché non è possibile rendere trasparente il campionatore solo in istanti di tempo di durata *infinitesima*.

Quello che effettivamente si riesce a fare è lasciare filtrare il segnale attraverso il campionatore in intervalli di tempo piccoli, ma non infinitesimi. Ciò, quindi, equivale a moltiplicare il segnale con un treno di rettangoli $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t \Leftrightarrow nT_c}{2\tau}\right)$ di durata 2τ molto piccola e non con un treno di impulsi. Il segnale campionato può così scriversi:

$$s_c(t) = s(t) r_p(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t \Leftrightarrow nT_c}{2\tau}\right)$$

Il treno di rettangoli, essendo un segnale periodico reale e pari, può essere sviluppato in serie di *Fourier* trigonometria e si può scrivere:

$$r_p(t) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(2\pi f_c t)$$

dove $C_n = f_c \text{sinc}(nf_c\tau)$, $f_c = \frac{1}{T_c}$ e $C_0 = f_c$. Quindi, la trasformata di *Fourier* del treno di rettangoli è:

$$R_p(f) = C_0 \delta(f) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} C_n [\delta(f \Leftrightarrow nf_c) + \delta(f + nf_c)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f \Leftrightarrow nf_c)$$

Dalle proprietà della trasformata di *Fourier*, il segnale campionato $s_c(t)$ ha una trasformata pari a:

$$S_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n S(f \Leftrightarrow f_n)$$

Quindi, anche in questo caso lo spettro del segnale campionato è formato dallo stesso spettro del segnale di partenza ripetuto e traslato nelle frequenze

multiple di quelle di campionamento. L'unica differenza con il caso teorico di un treno di impulsi è che, in questo caso più aderente alla realtà, i vari spettri traslati da cui è composto il segnale campionato, sono attenuati alle frequenze più elevate. Ciò è dovuto alla presenza dei coefficienti $\text{sinc}(nf_c\tau)$.

In realtà la situazione è ancora più complicata poiché il fronte di salita di ogni rettangolo non è perfettamente verticale dato che non è possibile far "attivare" il campionatore in un istante infinitesimo. Quest'ultima situazione corrisponderebbe alla moltiplicazione del segnale da campionare con un treno di trapezi.

13.2 Segnali a banda non limitata

I segnali da campionare in realtà sono sicuramente finiti nel tempo e questo comporta uno spettro in frequenza infinitamente esteso. Comunque, se il segnale è di energia, sicuramente lo spettro del segnale deve tendere a zero per frequenze molto grandi. È lecito, quindi, pensare di "tagliare" il segnale prima di campionarlo in modo da renderlo limitato in frequenza. Si può dimostrare facilmente, da un punto di vista intuitivo, che risulta più conveniente, prima di campionare, filtrare il segnale in modo da renderlo finito in frequenza. In quest'ultima caso, infatti, si introduce l'unico errore dovuto alla perdita di parte dell'energia del segnale, corrispondente alle "code" dello spettro che vengono eliminate. Se, invece, si procede al campionamento del segnale, lasciandolo illimitato in banda, in fase di ricezione si introduce sia l'errore dovuto al "taglio" delle alte frequenze, sia un errore di *aliasing* con gli altri spettri.

13.3 Filtro passa-basso

Un altro inconveniente deriva dalla presenza del filtro passa-basso a valle del sistema di campionamento che permette di isolare lo spettro centrale dagli altri. La funzione di trasferimento teorica di un filtro di questo tipo sarebbe:

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)$$

con w frequenza di taglio.

Purtroppo, non esiste in realtà un circuito che abbia una funzione di trasferimento del tipo riportata, ma tutti quanti i filtri reali presentano, semplicemente, un'ampia banda centrale pari ad 1 che si smorza in un breve intervallo di frequenze, fino ad annullarsi.

Questo potrebbe comportare dei seri problemi in fase di ricezione in quanto, se la frequenza di campionamento è molto vicina alla frequenza di taglio del filtro, è possibile che le parti estreme dello spettro centrale, quello del segnale originale, vengano tagliate o addirittura distorte. Per evitare questo problema, si preferisce campionare ad una frequenza leggermente più elevata rispetto alla banda occupata dal segnale.

13.4 Interpolatore

In fase di ricezione, l'interpolatore deve ricostruire il segnale a partire dai campioni $s(nT_c)$. Teoricamente questa operazione deve essere effettuata mediante la formula di ricostruzione del segnale campionato riportata nel capitolo 5. Essa implica una somma infinita di funzioni $\text{sinc}()$ che ovviamente, non è possibile fare con i circuiti reali (si dovrebbe aspettare un tempo infinito!). Per questo, l'interpolatore utilizzerà uno qualsiasi dei metodi di interpolazione (polinomiale, esponenziale, spline, ecc.) che, però, non garantisce l'esatta ricostruzione del segnale.

Capitolo 14

Il segnale telefonico

Il segnale vocale ha, generalmente, uno spettro limitato al *range* di frequenze che va da poche decine di Hz ad un migliaio di Hz. Questo implicherebbe la necessità di campionare un segnale vocale ad una frequenza di almeno 20000 Hz, affinché esso possa essere esattamente ricostruito a partire dai campioni.

Nella trasmissione telefonica la frequenza di campionamento è molto più bassa per due motivi:

- È inutile trasmettere tutta la banda del segnale vocale in quanto ciò che si vuol garantire nella telefonia è la sola intelligibilità, non certo la fedeltà del segnale. Per questo è possibile “tagliare” le alte frequenze, operazione che, pur eliminando parte dell’energia del segnale, permette comunque una buona intelligibilità.
- Il doppiino telefonico, usualmente utilizzato nelle trasmissioni telefoniche, ha una banda passante di soli 3400 Hz. Tutte le altre componenti del segnale a frequenze più elevate, vengono comunque distorte o addirittura annullate.

Lo *standard* PCM (*Pulse Code Modulation*, Modulazione a Codice di Impulsi) prevede un campionamento ad una frequenza di 8000 Hz. Si utilizza tale frequenza, e non 6800 Hz che sarebbe comunque sufficiente, per separare maggiormente, nel segnale campionato, i vari spettri, in modo che il filtro passa-basso nel ricevitore possa eliminare efficacemente lo spettro centrale. Si utilizzano, per ogni campione, 8 bit che permettono la distizione di 256 valori quantizzati. Dato che in ogni secondo, si producono 6800 campioni che abbisognano di 8 bit, evidentemente in ogni secondo si avranno $8 \cdot 8000 = 64000$ bit. In altre parole, per la trasmissione telefonica, è necessario utilizzare un canale che possa trasmettere *almeno* 64000 bit al secondo.

Attualmente i canali a disposizione permettono una velocità di trasmissione molto maggiore di quella richiesta: sono abbastanza comuni canali con

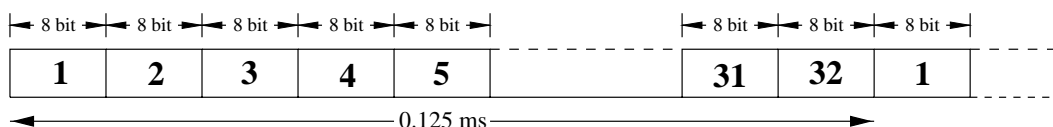


Figura 14.1: Moltiplicazione di tempo nello *standard* PCM

una capacità di 2.048 Gb/sec. È naturale domandarsi se è possibile sfruttare questa maggiore capacità di canale per poter trasmettere contemporaneamente più segnali telefonici. Ciò è possibile mediante la moltiplicazione di tempo che consiste nel condividere l'intervallo di tempo fra un campione e il successivo, fra più sorgenti. Se C [$\frac{\text{bit}}{\text{sec}}$] è la capacità di canale e $T_c = \frac{1}{f_c}$ [sec] è il periodo di campionamento (intervallo di tempo fra un campione e l'altro), ed ogni campione comporta la trasmissione di n bit, allora è possibile condividere il canale con un numero di sorgenti pari a:

$$n_s = \frac{T_c C}{n} = \frac{C}{n f_c}$$

Nello standard PCM con un canale di 2.048 $\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}}$ è possibile far condividere ogni *frame* (ogni periodo di campionamento) con 32 sorgenti che trasmettono, una dopo l'altra, i propri campioni (figura 14.1). In genere, due di questi segnali vengono usati per trasmissioni di servizio come per la sincronizzazione fra centrali e sorgenti. Infatti, affinché il ricevitore possa capire dove finisce il campione di un segnale e dove ne comincia un altro, è necessario che esso si sincronizzi con le sorgenti. Per fare questo, esso cerca nella sequenza di bit in arrivo, una particolare sequenza predefinita trasmessa su uno dei 32 canali. Trovato questo campione predefinito e conoscendone la posizione all'interno del *frame*, il ricevitore può sincronizzarsi in modo opportuno.

Più efficiente risulta la tecnica PCM differenziale, o DPCM. Essa si basa sul presupposto che il valore del segnale vocale all'istante nT_c è molto simile ai campioni immediatamente precedenti. Questo perché non ci sono forti variazioni del segnale vocale in brevi intervalli di tempo. Allora, è possibile "predire" il valore del segnale s_n conoscendo i campioni precedenti, mediante una combinazione lineare di questi ultimi, secondo certi coefficienti fissi caratteristici del particolare sistema. Se, per esempio, si vuole relazionare il segnale all'istante nT_c agli N campioni precedenti, si potrà utilizzare la seguente formula per la predizione:

$$\tilde{s}_n = \sum_{i=n-N}^{n-1} a_i s_i$$

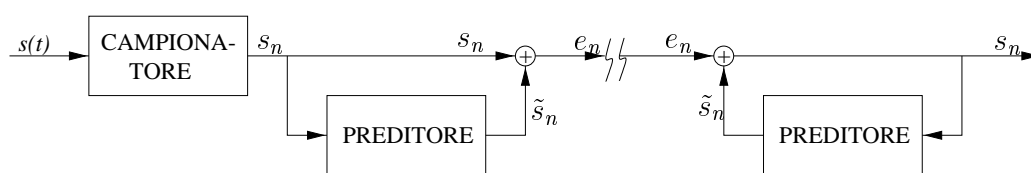


Figura 14.2: Sistema di trasmissione digitale mediante la tecnica PCM differenziale (DPCM).

dove a_i rappresentano i coefficienti della combinazione lineare. In questo caso viene trasmesso non il valore del campione ma la differenza fra il valore predetto e il valore effettivo $e_n = s_n \Leftrightarrow \tilde{s}_n$.

Il vantaggio che si ha nella tecnica PCM differenziale deriva dal fatto che il *range* dinamico di variazione di e_n è più piccolo del *range* dinamico del segnale in senso assoluto. Quindi è possibile utilizzare meno bit per la trasmissione di e_n ottenendo la stessa precisione con canali di piccola capacità (canali sporchi), oppure è possibile utilizzare lo stesso numero di bit con una maggiore precisione nella quantizzazione.

Ovviamente (figura 14.2), anche il ricevitore sarà dotato di un predittore che calcolerà, a partire dai campioni precedenti, il valore \tilde{s}_n da cui si risalirà al valore effettivo del campione con la formula: $s_n = e_n + \tilde{s}_n$.

Per valutare l'efficienza della tecnica differenziale rispetto allo *standard* PCM, si utilizza il seguente rapporto:

$$\frac{E[s_n^2]}{E[e_n^2]} = \frac{E[s_n^2]}{E[(s_n \Leftrightarrow \tilde{s}_n)^2]}$$

Il metodo risulta tanto più efficiente quanto più grande è il precedente indice. Teoricamente, se il valore predetto fosse esattamente uguale, in ogni istante, al valore reale del segnale, il precedente rapporto sarebbe molto grande. In genere non si conosce il segnale $s(t)$ da trasmettere che, quindi, viene trattato come un processo stocastico di cui si conosce la funzione densità di probabilità.

Per quantificare quello che è stato detto finora, si consideri la dipendenza del campione s_n dal solo campione precedente, cioè il valore predetto può essere calcolato nel seguente modo:

$$\tilde{s}_n = a s_{n-1}$$

dove a è un coefficiente costante da dimensionare in fase di progettazione del sistema di trasmissione e s_{n-1} è il campione precedentemente trasmesso. È necessario, a questo punto, calcolare il coefficiente a in modo da massimizzare il rapporto sulla bontà del sistema.

Si dimostra che:

$$\frac{E[s_n^2]}{E[e_n^2]} = \frac{R_s(0)}{R_s(0) [1 + a^2 \Leftrightarrow 2a\rho_s(1)]} = \frac{1}{1 + a^2 \Leftrightarrow 2a\rho_s(1)}$$

dove $R_s(0)$ è l'autocorrelazione del processo $s(t)$ calcolato per $\tau = 0$ e $\rho_s(1)$ è l'indice di correlazione calcolato per $\tau = 1$. Il valore minimo di tale rapporto si ha per $a = \rho_s(1)$ laddove:

$$\frac{E[s_n^2]}{E[e_n^2]} = \frac{1}{1 \Leftrightarrow \rho_s^2(1)} > 1$$

Questo metodo è efficiente, quindi, fissando il parametro a in modo ottimale. Se, invece, a è scelto arbitrariamente poiché non si conosce dal punto di vista statistico il segnale e quindi $\rho_s(1)$, allora il rapporto segnale/rumore diventa:

$$\frac{E[s_n^2]}{E[e_n^2]} = \frac{1}{1 + a^2 \Leftrightarrow 2a\rho_s(1)}$$

risulta vantaggioso (maggiore di 1) solo per alcuni particolari valori di $\rho_s(1)$. In alcuni casi, quindi, potrebbe addirittura peggiorare la tecnica PCM.

Capitolo 15

Codifica delle sorgenti discrete

Una sorgente è discreta quando può assumere solo un numero discreto (finito o infinito numerabile) di simboli. L'insieme dei suoi simboli forma l'*alfabeto* della sorgente \mathcal{S} . Sia $\mathcal{S} = \{x_1, x_2 \dots x_N\}$, dove il generico x_i è il simbolo i -esimo della sorgente. N è il numero dei simboli della sorgente, la cardinalità dell'insieme f , che può anche essere infinito.

La sorgente può assumere uno qualsiasi degli stati x_i ¹ con una certa probabilità $p(x_i)$, generalmente dipendente dal simbolo. Nel seguito si farà l'ipotesi di considerare indipendente lo stato della sorgente in un istante dagli stati assunti negli istanti precedenti. Questa è una ipotesi sicuramente restrittiva dato che, nella maggior parte dei casi, i simboli all'interno di un messaggio² sono fra loro correlati.

Ad ogni simbolo x_i della sorgente si associa un numero reale, detto *informazione* del simbolo, definito in questo modo:

$$I(x_i) = \log_2 \frac{1}{p(x_i)}$$

Il concetto di informazione è legato alla “quantità di notizie” che un simbolo porta con sé all'interno di un messaggio. La definizione di cui sopra è coerente con le seguenti considerazioni:

- L'informazione legata ad un simbolo maggiormente probabile è più piccola dell'informazione di un simbolo meno probabile
- L'informazione legata ad una coppia di simboli emessi è pari alla somma delle informazioni dei singoli simboli. Infatti, con la definizione

¹L'espressione “la sorgente assume uno stato x_i ” è identica all'espressione “la sorgente trasmette il simbolo x_i ”.

²Con la parola *messaggio* si intende una qualsiasi sequenza di simboli emessi dalla sorgente.

precedentemente data al concetto di informazione, si ha:

$$\begin{aligned} I(x_i, x_j) &= \log_2 \frac{1}{p(x_i, x_j)} = \log_2 \frac{1}{p(x_i)p(x_j)} = \\ &= \log_2 \frac{1}{p(x_i)} + \log_2 \frac{1}{p(x_j)} = I(x_i) + I(x_j) \end{aligned}$$

Dal concetto di informazione, si può passare al concetto di *entropia* della sorgente che rappresenta la media fatta su tutti i simboli dell'informazione legata ad essi:

$$H(X) = \sum_{i=1}^N p(x_i) I(x_i) = \sum_{i=1}^N p(x_i) \log_2 \frac{1}{p(x_i)}$$

Si può dimostrare che l'entropia della sorgente X non può superare un certo valore massimo che dipende dal numero di simboli:

$$H(X) \leq \log_2 N$$

Uno dei problemi legati alla trasmissione di un complesso discreto di simboli è la loro codifica in binario. Essa è, ovviamente, necessaria per poter trasmettere i simboli su un canale binario in forma digitale. Per far questo è necessario associare ad ogni simbolo una sequenza, più o meno lunga, di bit. Se la probabilità di emissione dei simboli non è uguale, è possibile creare delle codifiche più complesse di quella naturale³ che però possono comportare l'inconveniente della non *univoca decodificabilità*. Si dimostra che una codifica è univocamente decodificabile se $E[n] \geq H(X)$ se $E[n]$ rappresenta il numero medio di bit per ogni simbolo. Un metodo di codifica che garantisce l'univoca decodificabilità consiste nel far sì che i simboli siano le foglie di un albero binario e ogni ramo rappresenti un bit (1 o 0).

Oltre alla univoca decodificabilità dei messaggi, un obiettivo che si deve cercare di raggiungere è quello di minimizzare il più possibile il numero medio di bit $E[n]$, in modo da utilizzare canali meno costosi o velocizzare il tempo di trasmissione.

Il metodo che garantisce la migliore codifica dei simboli è il *metodo di Huffman* e si dimostra che con tale metodo si ha:

$$E[n] \leq H(X) + 1$$

e, quindi:

$$H(X) \leq E[n] \leq H(X) + 1$$

³La codifica naturale consiste nell'associare ad ogni simbolo un numero identico di bit.

Quindi, anche se la codifica di *Huffmann* è la migliore, può anche non essere la ottima⁴. Per diminuire il numero medio di bit è possibile creare delle *sorgenti virtuali*, indicate nel seguito con X^ν , i cui simboli sono le ν -uple di simboli della sorgente X . Si può dimostrare che $H(X^\nu) = \nu H(X)$, da cui, essendo $E[n_\nu] = \nu E[n]$ con $E[n_\nu]$ numero medio di bit della codifica della sorgente X^ν , si ha:

$$H(X) \leq E[n] \geq H(X) + \frac{1}{\nu}$$

In questo modo, aumentando ν è possibile avvicinare il più possibile il numero medio di bit $E[n]$ al valore minimo $H(X)$.

Un caso più realistico è rappresentato da quelle sorgenti la cui trasmissione di un simbolo dipende da almeno l'ultimo simbolo trasmesso. Per questo tipo di sorgenti non si può più definire una sola entropia, in quanto essa varia all'aumentare del tempo, data la dipendenza dalla parte di messaggio già trasmesso. Si definisce, quindi, l'*entropia condizionata* al passo n la seguente quantità:

$$H(X_n | X_{n-1}, \dots, X_0) = \sum_{i_0} \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} p(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \log_2 \frac{1}{p(x_n | x_{n-1} \dots x_0)}$$

Si definisce, invece, come *entropia della sorgente* la seguente quantità:

$$H_\infty(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(X_n | X_{n-1} \dots X_0)$$

Si può dimostrare che tutte le entropie condizionate soddisfano la seguente disuguaglianza:

$$H(X_n | X_{n-1} \dots X_0) \leq H(X_n | X_{n-1} \dots X_1) \leq \cdots \leq H(X_n)$$

Questo significa che l'informazione media fornita dalla sorgente va via via diminuendo in quanto, data la dipendenza dei simboli futuri da quelli già emessi, esiste una maggior probabilità di prevederli.

Nel caso in cui la sorgente discreta sia *Markoviana*, cioè l'emissione di un simbolo dipenda dal *solo* simbolo precedente, si può dimostrare che l'entropia della sorgente può essere calcolata come:

$$H_\infty(X) = \sum_i H(x_i) \pi_i$$

⁴Si ha una codifica ottima, quando il numero medio di bit è il più piccolo possibile e cioè quando $E[N] = H(X)$.

dove:

$$\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$$

è il vettore delle *probabilità asintotiche* e:

$$H(x_i) = \sum_j p(x_j|x_i) \log_2 \frac{1}{p(x_j|x_i)}$$

Capitolo 16

Modulazione

La *modulazione* è la tecnica maggiormente utilizzata per la trasmissione di un segnale analogico attraverso un canale. Essa consiste nel variare, modulare, alcuni parametri di un particolare segnale dipendente dal sistema, detto *portante*, in funzione del segnale da trasmettere $s(t)$ (*segnale modulante*). Il segnale effettivamente trasmesso attraverso il canale $s_t(t)$ (*segnale modulato*) è, quindi, un “ibrido” fra la portante $c(t)$ e il segnale modulante $s(t)$.

Nella trasmissione dei segnali analogici viene utilizzata la modulazione per diversi motivi, tra cui i seguenti:

- Spesso il canale attraverso cui è necessario trasmettere il segnale, ha una banda passante più o meno larga posizionata attorno a certe frequenze particolari. È quindi necessario modificare lo spettro del segnale $s(t)$ in modo che esso si trovi all’interno della banda passante del canale e diventi, quindi, *idoneo* alla trasmissione. Ciò è possibile farlo attraverso la tecnica di modulazione.
- In alcuni casi, la banda passante del canale è molto più grande rispetto alla banda occupata dal segnale $s(t)$. Per questo motivo si può pensare di fare condividere lo stesso canale per trasmettere contemporaneamente più segnali, che si dividono equamente la banda passante.

La portante generalmente utilizzata è una singola armonica elementare di ampiezza A_c e di frequenza f_c :

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

Per questo tipo di portante, individuata univocamente dai tre parametri di ampiezza A_c , frequenza f_c e fase φ_c , è possibile utilizzare tre tipi di modulazione:

modulazione d'ampiezza AM Nella modulazione AM viene modulata l'ampiezza della portante A_c in funzione del valore assunto dal segnale modulante istante per istante.

modulazione di fase PM Nella modulazione di fase, invece, viene variato il termine φ_c della portante in funzione di $s(t)$.

modulazione di frequenza FM Nella FM, molto simile alla PM, viene modulata la frequenza della portante in funzione dell'ampiezza del segnale $s(t)$.

Nel seguito verrà descritto in dettaglio i tre tipi di modulazione, tenendo presente che la portante sinusoidale non è l'unica utilizzata ma esistono altri tipi di portanti, e quindi di modulazioni, come per esempi treni di impulsi di durata finita o altro.

16.1 Modulazione di ampiezza AM

Esistono vari tipi di modulazione d'ampiezza che è la più semplice tecnica di modulazione che può essere utilizzata.

16.1.1 DSB-SC

Nella modulazione d'ampiezza DSB-SC (*Double Sided Band-Suppressed Carrier*, Doppia Banda Laterale con Portante Soppressa) viene variata l'ampiezza della portante in modo proporzionale con il segnale $s(t)$. In definitiva, il segnale trasmesso diventa:

$$s_t(t) = s(t) \cdot c(t) = A_c s(t) \cos(2\pi f_c t)$$

che ha una trasformata di *Fourier* pari a:

$$S_t(f) = \frac{A_c}{2} S(f \Leftrightarrow f_c) + \frac{A_c}{2} S(f + f_c)$$

In questo modo, lo spettro del segnale $s(t)$, indicato con $S(f)$ che supponiamo limitato in frequenza all'intervallo $[\Leftrightarrow w, +w]$, viene traslato nelle frequenze f_c e $\Leftrightarrow f_c$, conservando la sua "fisionomia".

Dal segnale $s_t(t)$ si può riottenere il segnale originale $s(t)$ mediante una *demodulazione coerente*, moltiplicando cioè ancora una volta per una armonica elementare di frequenza f_c *in fase* con la portante. Si ottiene, quindi, il segnale:

$$x(t) = s_t(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) = A_c s(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) = A_c s(t) \frac{1 + \cos(4\pi f_c t)}{2}$$

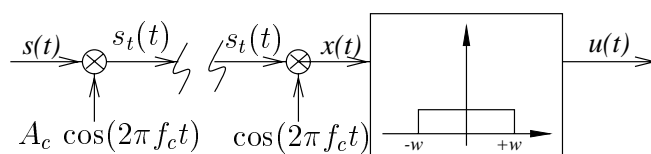


Figura 16.1: Rappresentazione di un sistema di trasmissione basato sulla modulazione DSB-SC

che ha una trasformata pari a:

$$X(f) = \frac{A_c}{2} S(f) + \frac{A_c}{2} S(f \Leftrightarrow 2f_c) + \frac{A_c}{2} S(f + 2f_c)$$

È quindi possibile riottenere il segnale originale utilizzando un filtro passa-basso con frequenza di taglio uguale all'ampiezza dello spettro del segnale w . L'utente riceverà il segnale:

$$u(t) = \frac{A_c}{2} s(t)$$

che, a meno di una costante, rappresenta il segnale di partenza.

Lo schema della trasmissione DSB-SC è rappresentato in figura 16.1.

Se esiste uno sfasamento ϕ_0 fra modulatore e demodulatore, la DSB-SC dà comunque dei risultati positivi, in quanto è facile dimostrare che, il segnale ricevuto sarebbe:

$$u(t) = \frac{A_c}{2} \cos(\phi_0) s(t)$$

che è proporzionale al segnale originale. L'unica differenza è che, in questo caso, esiste un coefficiente di attenuazione pari a $\cos(\phi_0)$ che comunque può essere recuperato in fase di ricezione.

Se lo sfasamento fosse, però, esattamente di $\frac{\pi}{2}$, l'attenuazione del segnale sarebbe completa e il segnale ricevuto sarebbe comunque nullo in ogni istante, indipendentemente dal segnale originale. Questa considerazione viene sfruttata per trasmettere due segnali *in quadratura* sullo stesso canale, contemporaneamente e nella stessa banda di segnale. Il sistema di trasmissione con *portante in quadratura* è visualizzato in figura 16.2.

Si dimostra che:

$$u_1(t) = \frac{1}{2} s_1(t)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2} s_2(t)$$

In questo modo è quindi possibile separare in qualunque momento i due segnali, pur occupando la stessa banda di canale ed essendo trasmessi contemporaneamente. Se, però, la quadratura fra le portanti non è perfetta, si

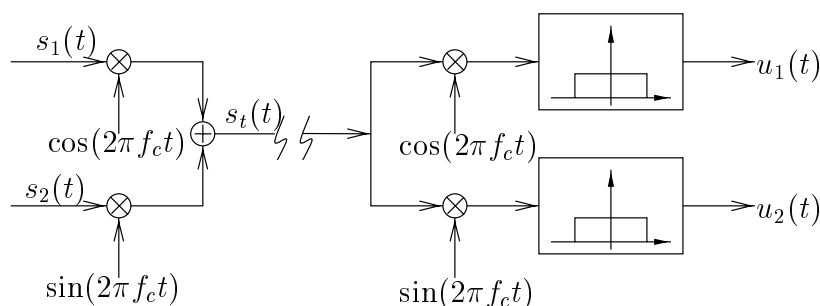


Figura 16.2: Schema di trasmissione con portante in quadratura

può dimostrare che in uscita il segnale $u_1(t)$ sarà un “ibrido” fra il segnale $s_1(t)$ e il segnale $s_2(t)$ e così per il segnale in uscita $u_2(t)$.

16.1.2 SSB

La modulazione d’ampiezza SSB (*Single Sided Band*, Singola Banda Laterale), si fonda sul presupposto che, per un segnale reale $s(t)$, come sono tutti i segnali che praticamente si devono trasmettere, la descrizione del solo spettro positivo del segnale è esaustiva. Infatti, la trasformata di *Fourier* di un segnale reale gode della simmetria *hermitiana* che, appunto, permette di conoscere il valore della trasformata per frequenze negative conoscendo *soltanto* i valori per frequenze positive.

Per questo motivo, è sufficiente, nella trasmissione di un segnale, trasmettere soltanto un solo “semispettro”: la Banda Laterale Superiore (BLS) o la Banda Laterali Inferiore (BLI). Si può dimostrare che, il segnale formato da una sola banda laterale è del tipo:

$$s_t(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t) \pm \hat{s}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

dove $\hat{s}(t)$ è la trasformata di *Hilbert* del segnale $s(t)$ (il segno $+$ per la BLS e il segno \Leftrightarrow per la BLI).

Anche in questo caso, la demodulazione può essere effettuata mediante un oscillatore coerente ed un filtro passa-basso con frequenza di taglio pari alla banda occupata dal segnale. Si dimostra che si ottiene, in questo modo, il segnale:

$$u(t) = \frac{1}{2}s(t)$$

Questo metodo ha l’indubbio vantaggio di occupare una minore quantità di banda visto che lo spettro del segnale viene trasmesso solo in parte. Ha, però, l’inconveniente di utilizzare un filtro per il “taglio” di una banda

laterale. Praticamente i filtri passa-basso non hanno una frequenza di taglio ben definita e questo comporta la trasmissione anche di una parte della banda laterale che, invece, si vuole effettivamente eliminare. Viene utilizzata principalmente con segnali, come quello vocale, che presentano una piccola banda centrale entro cui non ci sono componenti di segnale, in cui, cioè, le due bande laterali sono ben distanziate.

16.1.3 VSB

La modulazione VSB (*Vestigial Sided Band*, Banda Laterale Vestigiale) è un “ibrido” fra la DSB e la SSB in quanto trasmette tutta una banda laterale e parte (una vestigia) dell'altra banda laterale. Con questa tecnica è possibile, però, una demodulazione solo se il filtro che viene utilizzato in fase di modulazione per l'eliminazione di una parte di banda, ha questa caratteristica:

$$H(f \Leftrightarrow f_c) + H(f + f_c) = \text{cost}$$

dove $H(f)$ è la funzione di trasferimento del filtro e f_c è la frequenza della portante.

16.1.4 AM *standard*

La modulazione AM *standard* viene principalmente utilizzata nelle comunicazioni radio dato che il ricevitore relativo è molto semplice da costruire.

Con questo tipo di modulazione, viene trasmesso non soltanto il segnale modulato ma anche la portante. A prima vista sembrerebbe inutile trasmettere la portante così com'è, dato che non fornisce nessuna informazione sul segnale modulante, ed effettivamente così è. L'unico motivo per cui, nella modulazione AM *standard* si trasmette anche la portante è perché, solo in questo modo, è possibile costruire dei ricevitori molto semplici e a basso costo.

Il segnale trasmesso in questo tipo di modulazione è:

$$s_t(t) = c(t) [1 + k_a s(t)] = A_c [1 + k_a s(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Con questo tipo di modulazione, la demodulazione deve essere effettuata mediante un demodulatore ad involuppo che può essere facilmente realizzato con il circuito di figura 16.3.

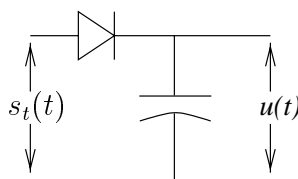


Figura 16.3: Semplice circuito di un ricevitore AM

16.2 Modulazione in frequenza FM e in fase FM

La modulazione in frequenza **FM** consiste nel variare la frequenza istantanea della portante in modo proporzionale al segnale modulante $s(t)$. Allo stesso modo, la modulazione di fase **PM** consiste nel variare la costante di fase della portante proporzionalmente ad $s(t)$.

Definendo frequenza istantanea, la seguente quantità:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}$$

essendo la portante:

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_c(t)) = A_c \cos(\theta(t))$$

si ha che, nella modulazione di fase:

$$s_t(t) = A_c \cos(2\pi f_c + k_P s(t))$$

e nella modulazione di frequenza:

$$s_t(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c + 2\pi k_F \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right)$$

Pur apparentemente diverse, le due modulazioni sono strettamente legate tra di loro. Infatti, avendo a disposizione un modulatore **FM**, è possibile costruire semplicemente un modulatore **PM** e, al contrario, avendo un modulatore **PM** si può ottenere immediatamente un modulatore **FM**, tenendo presente che la modulazione **PM** di un segnale $s(t)$ coincide con la modulazione **FM** del segnale $s'(t)$ e, al contrario, la modulazione **PM** del segnale $s(t)$ coincide la modulazione **FM** del segnale $\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$

Lo studio della occupazione di banda di un segnale nella modulazione **FM** o **PM** non è molto agevole analiticamente. Se facciamo l'ipotesi di

considerare il semplice segnale modulante rappresentato dal singolo tono $s(t) = A_s \cos(2\pi f_s t)$ per $t > 0$, si può dimostrare che il segnale trasmesso è:

$$s_t(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_s} \sin(2\pi f_s t) \right]$$

avendo posto $\Delta f = A_s k_F$ la *deviazione in frequenza*. Infatti, la frequenza istantanea di questo segnale è:

$$f_i(t) = f_c + \Delta f \cos(2\pi f_s t)$$

La trasformata di *Fourier* del segnale trasmesso e, quindi, la sua occupazione in banda è:

$$S_t(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m) [\delta(f - (f_c + n f_s)) + \delta(f + (f_c + n f_s))]$$

essendo $J_n(m)$ i coefficienti di *Bessel* di indice n .

Teoricamente, quindi, l'occupazione di banda di un segnale in modulazione FM è infinita. Essa, però, può essere considerata finita, tenendo presente che i coefficienti di *Bessel*, all'aumentare di n , sono sempre più piccoli e quindi, da una certa frequenza in poi possono essere trascurati. Si definisce, quindi, *Banda a Radiofrequenza BRF*, la banda entro cui si trova la maggior parte dell'energia del segnale e si può calcolare con l'*approssimazione di Carson*:

$$\text{BRF} = 2(m + 1)w$$

dove w è l'occupazione in banda del segnale modulante e $m = \frac{\Delta f}{w}$ è l'*indice di modulazione*.

Capitolo 17

Rumore

Il rumore è una caratteristica sempre presente nei circuiti elettronici, semplici che essi siano. Esistono vari tipi di rumore originati da diverse cause. Lo stesso resistore, un pezzo di conduttore, è soggetto a rumore termico, il più importante di tutti, causato dalle fluttuazioni statistiche degli elettroni in moto continuo all'interno del mezzo. Oltre al rumore termico esiste il rumore *shot*, il rumore *flicker* ed altri che dipendono da molti fattori, che non verranno presi in considerazione.

Nel seguito il rumore verrà considerato come un processo stocastico, dato che il suo valore, istante per istante, non è determinato.

17.1 Caratteristiche del rumore termico

Si può dimostrare, attraverso considerazioni termodinamiche e quantistiche, che la densità spettrale d'energia del processo stocastico $V(t)$ che modella il rumore termico è dato dalla seguente formula:

$$S_v(f) = \frac{2Rh|f|}{e^{\frac{h|f|}{kT}} \Leftrightarrow 1}$$

Per frequenze non molto elevate, al di sotto dei GHz (ipotesi soddisfatta nella maggior parte delle applicazioni reali), la precedente formula può essere semplificata e si può scrivere il rumore come un processo bianco, cioè con una densità spettrale costante:

$$S_v(f) = 2kTR = \frac{N_0}{2}$$

Supponendo, quindi, costante lo spettro d'energia del rumore termico, la sua autocorrelazione diventa:

$$R_v(\tau) = 2kTR\delta(f)$$

Questo vuol dire che le variabili statistiche estratte in istanti diversi t_1 e t_2 sono fra loro incorrelate e, essendo il rumore un processo gaussiano, indipendenti.

Un resistore “rumoroso” può quindi essere sostituito, in un circuito, con un resistore ideale non “rumoroso” ed un generatore di tensione in serie. Di questo generatore di tensione si conosce semplicemente la densità spettrale di energia e non una forma d’onda determinata. Mediante un equivalente di *Norton*, la situazione può essere anche schematizzata mediante il parallelo della solita resistenza ideale ed un generatore di corrente, la cui densità spettrale di energia risulta:

$$S_i(f) = \frac{S_v(f)}{R^2} = \frac{2kT}{R}$$

Per analizzare quantitativamente il fenomeno del rumore termico, è necessario calcolare la *potenza di rumore disponibile* che rappresenta la potenza del “processo rumore” che può essere trasmessa ad un carico. Nelle ipotesi di *massimo trasferimento di potenza*, si può dimostrare che la potenza di rumore disponibile è $N_d = kTB_N$, dove B_N rappresenta la massima frequenza di interesse del problema. È anche possibile definire una densità di potenza disponibile come $S_a(f) = \frac{N_d}{2B} = \frac{kT}{2}$

17.2 Filtraggio di rumore attraverso un sistema lineare tempo-invariante

Come tutti i processi stocastici, si può scrivere che:

$$S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2$$

dove $Y(t)$ rappresenta il processo stocastico d’uscita e $X(t)$ rappresenta il processo stocastico di ingresso che modella il rumore.

La potenza del processo $Y(t)$ può, quindi, essere calcolata nel seguente modo:

$$E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

Sia $g_d = \max |H(f)|^2$, allora è possibile definire la *banda equivalente di rumore* come:

$$B_N = \frac{1}{g_d} \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

Quindi, la potenza del processo in uscita può semplicemente scriversi come:

$$E[Y^2(t)] = B_N N_0 g_d$$

17.3 Cifra di rumore e temperatura equivalente di rumore

Quando si vuole studiare quantitativamente il fenomeno del rumore per un circuito complesso, non è possibile fare sempre una analisi microscopica, ma è necessario considerare il circuito come una *black-box* che ha certe caratteristiche *globali* in termini di rumore. Per questo, si definiscono alcuni indici che, strettamente legati tra loro, descrivono il comportamento del circuito in termini di rumore.

Dato un blocco circuitale, con un guadagno pari a g_d e potenza di rumore N_d , è possibile definire la *cifra di rumore*, come il rapporto fra la potenza di rumore in uscita e la potenza di rumore in uscita che si avrebbe nelle stesse condizioni, a meno di considerare non rumoroso il circuito.

$$F = \frac{N_{do}}{N_{do}^*}$$

Ovviamente, il rumore in uscita N_{do} è uguale al rumore introdotto dal circuito N_d e dal rumore in ingresso amplificato $g_d N_{di} = N_{do}^*$. Quindi, la cifra di rumore può essere scritta come:

$$F = \frac{N_d + N_{do}^*}{N_{do}^*} = 1 + \frac{N_d}{g_d N_{di}}$$

Supponendo che in ingresso ci sia un rumore che può produrre una potenza disponibile pari a $N_i = kTB_N$ si ha:

$$F = 1 + \frac{N_d}{kTBg_d}$$

▷ La cifra di rumore può essere messa in relazione con il rapporto segnale/rumore in uscita e il rapporto segnale/rumore in ingresso. Si può dimostrare che: $F = \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o}$.

La *temperatura equivalente di rumore* viene invece definita come l'incremento di temperatura che la sorgente di rumore deve avere affinché ci sia lo stesso rumore in uscita considerando non rumoroso il circuito. Si dimostra che:

$$T_E = \frac{N_d}{kg_dB} = T(F \Leftrightarrow 1)$$

e quindi:

$$F = 1 + \frac{T_E}{T}$$

17.4 L'attenuatore resistivo

Un attenuatore resistivo è un circuito logico formato da soli elementi passivi, che quindi attenua il segnale in ingresso di un certo fattore $g_d = \frac{1}{L} < 1$. Se supponiamo che in uscita ci sia un rumore pari a $N_{do} = kTB_N$ e che esso produca un potenza di rumore pari a N_d , allora si dimostra facilmente che:

$$F = L$$

cioè la cifra di rumore è tanto più grande (tanto più rumoroso risulta il circuito) quanto più grande è l'attenuazione.

17.5 Circuiti rumorosi in cascata

Si abbia una serie di circuiti che sono collegati a cascata in modo da formare un unico elemento. Ognuno di questi circuiti sia caratterizzato da una cifra di rumore F_k , da una potenza introdotta N_k e da un guadagno g_k . Inoltre, si supponga di avere in ingresso un rumore pari a N_{di} . Si vuole caratterizzare tutto il sistema, formato dall'insieme di questi elementi, dal punto di vista del rumore. Per fare ciò, definiamo la cifra di rumore equivalente come il rapporto fra il rumore in uscita dal sistema e il rumore in uscita se considerassimo non "rumorosi" gli elementi. Si dimostra che:

$$F = F_1 + \frac{F_2}{g_1} + \frac{F_3}{g_1 g_2} + \cdots + \frac{F_n}{g_1 g_2 \cdots g_{n-1}}$$

Capitolo 18

Rumore nella modulazione

Nella maggior parte dei sistemi di elaborazione del segnale, la potenza di rumore è trascurabile rispetto alla potenza del segnale. In alcuni casi, però, quando il segnale è a bassa potenza, come nei ricevitori di segnali a valle di una linea di trasmissione a grande attenuazione, il rumore può degradare notevolmente il segnale con ovvi effetti indesiderati. Per questo, è necessario quantificare, per ogni sistema di trasmissione, l'entità del rumore e quanto incide sul segnale. Si definisce, quindi, il rapporto segnale/rumore in uscita dal ricevitore:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{\text{potenza del segnale utile ricevuto}}{\text{potenza di rumore ricevuto}}$$

L'impianto è tanto più efficiente in termini di rumore, quanto più grande è questo indice.

Per confrontare vari tipi di sistemi di trasmissione, è utile confrontare due rapporti segnale/rumore, uno in ingresso ed uno in uscita. Si definisce, quindi, *cifra di merito* la seguente quantità:

$$F = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_o}{\left(\frac{S}{N}\right)_c}$$

dove $\left(\frac{S}{N}\right)_c$ è definito rapporto segnale/rumore di canale nel seguente modo:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_c = \frac{\text{potenza del segnale trasmesso sul canale}}{\text{potenza del rumore nella banda occupata dal canale}}$$

Il rumore viene generalmente modellizzato come un processo stocastico $W(t)$ bianco, cioè a densità spettrale di energia costante e pari a $\frac{N_0}{2}$. Poiché il segnale trasmesso occupa solo una banda ristretta, dipendente dal tipo di

modulazione utilizzata, si può pensare di filtrare, a monte del ricevitore, il segnale “rumoroso”, mediante un sistema che lasci passare solo le frequenze utili del segnale, e rimuova tutte le altre componenti che sono causate dal solo rumore. In definitiva, si può considerare il rumore come un processo stocastico $N(t)$ la cui densità spettrale di energia è costante e pari ad $\frac{N_0}{2}$ *solo* nella banda occupata dal segnale. Essendo, quindi, un processo a banda limitata, si può dimostrare che:

$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

dove $n_I(t)$ è detta *componente in fase* e $n_Q(t)$ è la *componente in quadratura*. Si può dimostrare che, la densità spettrale dei due processi $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ è uguale ed è costante a N_0 in una banda di frequenze centrata nell’origine e di ampiezza pari all’occupazione di banda del segnale.

18.1 Rumore nella modulazione AM DSB-SC

Nella DSB-SC, il segnale trasmesso è:

$$s_t(t) = A_c s(t) \cos(2\pi f_c t)$$

dove $s(t)$ è il segnale modulante di potenza pari a P_s , mentre il segnale ricevuto dall’utente è:

$$s_u(t) = \frac{A_C}{2} s(t) + \frac{1}{2} n_I(t)$$

Si può dimostrare che, la potenza trasmessa è:

$$P_t = \frac{A_C^2}{2} P_s,$$

la potenza di rumore nella banda del segnale è:

$$N_c = N_0 w$$

il rapporto segnale/rumore di canale è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_C = \frac{A_C^2 P_s}{2 N_0 w}$$

la potenza del segnale utile ricevuta dall’utente è:

$$P_u = \frac{A_C^2 P_s}{4}$$

la potenza di rumore ricevuta dall'utente è:

$$N_u = \frac{N_0 w}{2}$$

il rapporto segnale/rumore in uscita è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{A_C^2 P_s}{2 N_0 w}$$

e, quindi, la cifra di merito è:

$$F = 1$$

18.2 Rumore nella modulazione AM SSB

Nella SSB, si dimostra, mediante la *trasformata di Hilbert*, che:

$$s_t(t) = \frac{A_C}{2} s(t) \cos(2\pi f_c t) \pm \hat{s}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

e che il segnale ricevuto dall'utente è:

$$s_u(t) = \frac{A_C}{4} s(t) + \frac{n_I(t)}{2} \cos(\pi w t) + \frac{n_Q(t)}{2} \sin(\pi w t)$$

Quindi, la potenza trasmessa è:

$$P_t = \frac{A_C^2}{4} P_s$$

la potenza di rumore nella banda del segnale è:

$$N_c = N_0 w$$

il rapporto segnale/rumore di canale è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_C = \frac{A_C^2 P_s}{4 N_0 w}$$

la potenza del segnale utile ricevuta dall'utente è:

$$P_u = \frac{A_C^2}{16} P_s$$

la potenza di rumore ricevuta dall'utente è:

$$N_u = \frac{N_0 w}{4}$$

il rapporto segnale/rumore in uscita è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{A_C^2 P_s}{4 N_0 w}$$

e la cifra di merito è:

$$F = 1$$

18.3 Rumore nella modulazione AM *standard*

La modulazione AM *standard* è un sistema di trasmissione meno efficiente in termini di rumore, in quanto viene trasmessa, insieme al segnale, potenza dedicata alla portante che non porta nessuna informazione.

Il segnale trasmesso sul canale è:

$$s_t(t) = A_C [1 + k_a s(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

La potenza trasmessa è, quindi:

$$P_t = \frac{A_C^2}{2} (1 + k_a^2 P_s)$$

il rumore nella banda del segnale è:

$$N_c = N_0 w$$

il rapporto segnale/rumore di canale è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_C = \frac{A_C^2 (1 + k_a^2 P_s)}{2 N_0 w}$$

Si dimostra che il segnale ricevuto dall'utente è:

$$s_u(t) = \sqrt{[A_c + A_c k_a s(t) + n_I(t)]^2 + n_Q(t)^2}$$

Nell'ipotesi che la potenza della portante sia mediamente molto maggiore della potenza di rumore, allora si può scrivere:

$$s_u(t) = A_c + A_c k_a s(t) + n_I(t)$$

Quindi, la potenza di segnale utile ricevuta dall'utente è (scartando la potenza della portante):

$$P_u = A_C^2 k_a^2 P_s$$

la potenza di rumore ricevuto dall'utente è:

$$N_u = 2 N_0 w$$

il rapporto segnale/rumore all'uscita è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{A_C^2 k_a^2 P_s}{2 N_0 w}$$

e la cifra di merito è:

$$F = \frac{k_a^2 P_s}{1 + k_a^2 P_s}$$

18.4 Rumore nella modulazione FM

In termini di rumore, la modulazione FM risulta quella più efficiente, con una cifra di merito che può essere superiore all'unità.

Il segnale trasmesso sul canale è:

$$s_t(t) = A_c \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right) = A_C \cos(2\pi f_c t + \Phi(t))$$

dove:

$$\Phi(t) = 2\pi k_f \int_0^t s(\tau) d\tau$$

Il rumore, in questo caso, può essere scritto come:

$$n(t) = r(t) \cos(2\pi f_c t + \Psi(t))$$

Si dimostra che il segnale ricevuto dall'utente è:

$$s_u(t) = k_f s(t) + n_d(t)$$

dove:

$$n_d(t) = \frac{1}{2\pi A_C} \frac{d}{dt} \{r(t) \sin[\Psi(t) \Leftrightarrow \Phi(t)]\}$$

Si può dimostrare che, la potenza di rumore trasmessa è:

$$P_t = \frac{1}{2} A_C^2$$

la potenza di rumore nella banda di segnale è:

$$N_c = N_0 w$$

il rapporto segnale/rumore di canale è:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_C = \frac{A_C^2}{2 N_0 w}$$

la potenza di segnale utile ricevuta dall'utente è:

$$P_u = k_f^2 P_s$$

la potenza di rumore ricevuto dall'utente è:

$$N_u = \frac{2 N_0 w^3}{3 A_C^2}$$

il rapporto segnale/rumore all'uscita è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{3 A_C^2 k_f^2 P_s}{2 w^3 N_0}$$

e la cifra di merito è:

$$F = \frac{3 k_f^2 P_s}{w^2}$$

Si può quindi notare come la cifra di rumore può assumere valori abbastanza grandi se si dimensiona intelligentemente la sensitività in frequenza k_f .

Per la modulazione FM si definisce una *condizione di soglia* la cui validità garantisce una certa efficienza del sistema dal punto di vista del rumore:

$$\frac{P_r}{N_0 \text{ BRF}} = \frac{A_C^2}{2 N_0 \text{ BRF}} \geq 10 \text{ dB}$$

Capitolo 19

Teoria delle code

Si supponga di avere un sistema di elaborazione il cui scopo consiste nel servire un certo numero di utenti, quando questi lo richiedono. Il sistema è dotato di un numero di *serventi* che sono le unità elementari che possono, singolarmente, servire un utente alla volta. Mentre i serventi soddisfano le richieste degli utenti, eventuali altre richieste vengono “parcheeggiate” in un apposito spazio, detto *coda*, in attesa che qualche utente finisca di essere servito.

Per descrivere un sistema di questo tipo, è necessario specificare:

- il tipo di traffico in ingresso, cioè in che modo gli utenti possono accedere al sistema. Generalmente, il traffico in ingresso è modellizzato mediante un processo stocastico *poissoniano*, ma può anche essere un processo determinato.
- il tempo necessario per servire un utente da parte di un solo servente. In genere, questa variabile è considerata aleatoria e viene modellizzata come una esponenziale decrescente.
- il numero di serventi che possono, contemporaneamente, lavorare per servire gli utenti.
- la capacità di memorizzazione, è cioè il numero di utenti presenti contemporaneamente in coda e nei serventi.
- il numero di utenti che possono accedere contemporaneamente al sistema.

Definite queste variabili, viene definito univocamente il sistema che, *in toto*, viene chiamato *coda*.

Si usa la seguente simbologia:

xx/xx/xx/xx/xx

dove, ogni **xx** rappresenta una delle cinque variabili descritte in precedente. Per quanto riguarda le variabili non numeriche, le prime due, si usa scrivere:

M processo stocastico *poissoniano* per il traffico in ingresso, variabile esponenziale negativa per il tempo di servizio

D processo o variabile determinata

G non specificata, quindi generica

Se le ultime due variabili non vengono specificate, allora si considerano pari ad ∞ .

19.1 Coda M/M/1

Questo tipo di coda è caratterizzata da un traffico in ingresso modellizzato mediante un processo di *Poisson* con un numero medio di richieste nell'unità di tempo pari a λ , una variabile esponenziale negativa che descrive il tempo di servizio con tempo medio pari a μ , un solo servente e un numero infinito di posti in coda.

Si può dimostrare che, la variabile aleatoria $N(\mathbf{t})$ che descrive il numero di utenti contemporaneamente presenti nel sistema (fra coda e serventi) è una catena di *Markov* tempo continua, descrivibile mediante le seguenti frequenze di transizioni:

$$\gamma_{i,i+1} = \lambda$$

e

$$\gamma_{i,i-1} = \mu$$

Tutte le altre frequenze di transizione sono nulle e questo si traduce col fatto che non esiste la possibilità di transizione multipla.

Si dimostra che:

$$p_j = e^j (1 \Leftrightarrow e)$$

dove $e = \frac{\lambda}{\mu}$ e $p_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} p(N(t) = j)$. Quindi, il numero medio di utenti presenti nel sistema:

$$E[N(t)] = \frac{e}{1 \Leftrightarrow e}$$

il tempo medio di servizio totale:

$$E[T] = \frac{E[N(t)]}{\lambda} = \frac{1}{\mu \Leftrightarrow \lambda}$$

il tempo di attesa in coda:

$$E[T_a] = \frac{e}{\mu(1 \Leftrightarrow e)}$$

il numero medio di utenti presenti in coda:

$$E[N_a] = \lambda E[T_a] = \frac{e^2}{1 \Leftrightarrow e}$$

il traffico in uscita (o *throughput*) è:

$$\gamma = \lambda$$

19.2 Coda M/M/2

Questo tipo di coda è uguale alla precedente solo che, in questa, il numero di serventi è pari a due.

Matematicamente, l'unica differenza si riscontra nelle frequenze di transizione della catena di *Markov* tempo-continua $N(t)$. Infatti, si ha che:

$$\begin{aligned}\gamma_{1,0} &= \mu \\ \gamma_{i,i-1} &= 2\mu \quad \forall i > 1 \\ \gamma_{i,i+1} &= \lambda \quad \forall i\end{aligned}$$

Per questo tipo di coda, si dimostra che:

$$p_j = \frac{2e^n(1 \Leftrightarrow e)}{1 + e}$$

il numero medio di utenti presenti nel sistema è:

$$E[N(t)] = \frac{2e}{\lambda(1 \Leftrightarrow e^2)}$$

il tempo medio di attesa in coda è:

$$E[T_a] = E[T] \Leftrightarrow \frac{1}{\mu}$$

il numero medio di utenti presenti in coda è:

$$E[N_a(t)] = \lambda E[T_a]$$

il traffico in uscita è:

$$\gamma = \lambda$$

Parte IV

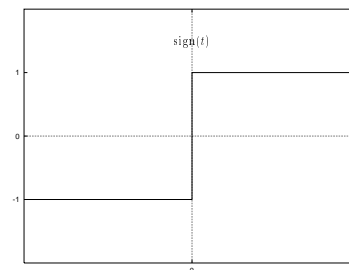
Appendici

Appendice A

Segnali determinati

A.1 Segno

$$s(t) = \text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ +1 & t > 0 \end{cases}$$



Il segnale $\text{sign}(t)$ è un segnale di potenza.

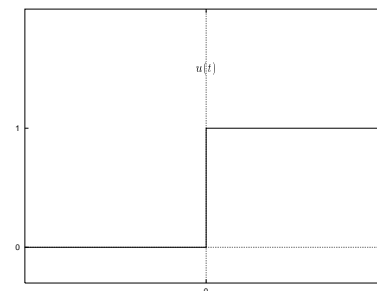
$$P_s = 0$$

La trasformata di *Fourier* del segnale è:

$$\text{sign}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

A.2 Gradino unitario

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sign}(t)$$



Il gradino unitario è un segnale di potenza.

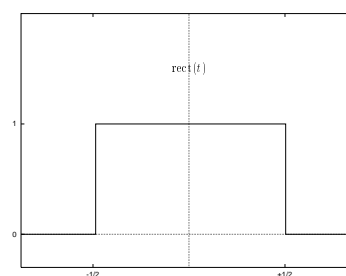
$$P_u = \frac{1}{2}$$

La trasformata di *Fourier* è:

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

A.3 Rettangolo

$$s(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Il segnale rettangolare è un segnale di energia e risulta:

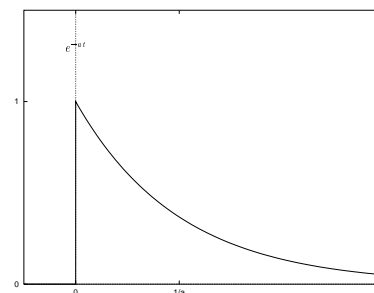
$$E_s = 1$$

La trasformata di *Fourier* è:

$$\text{rect}(t) \longleftrightarrow \text{sinc}(f)$$

A.4 Esponenziale decrescente

$$s(t) = e^{-at} u(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Il segnale esponenziale è un segnale di energia:

$$E_s = \frac{1}{2a}$$

La sua area è:

$$A = \frac{1}{a}$$

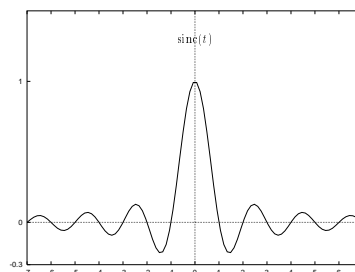
La sua trasformata di *Fourier* è:

$$s(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Viene spesso utilizzato anche il segnale pari $s(t) = e^{-a|t|}$, anch'esso un segnale di energia ($E_s = \frac{1}{a}$) con trasformata di *Fourier* pari a $S(f) = \frac{2a}{a^2 + j4\pi f^2}$.

A.5 Seno cardinale

$$s(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



Il segnale $\text{sinc}(t)$ è un segnale di energia e risulta:

$$E_s = 1$$

La trasformata di *Fourier* del seno cardinale è:

$$\text{sinc}(t) \longleftrightarrow \text{rect}(f)$$

A.6 Impulso

L'impulso $\delta(t)$ non è, in effetti, una funzione vera e propria ma è definita, formalmente, come una distribuzione, però esso può essere trattato alla stessa stregua di un qualsiasi altro segnale, ricordando le seguenti proprietà:

- $\delta(t)$ è una funzione pari
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) dt = 1$
- $s(t) \cdot \delta(t \leftrightarrow t_0) = s(t_0) \cdot \delta(t \leftrightarrow t_0)$

- $s(t) \star \delta(t \Leftrightarrow t_0) = s(t \Leftrightarrow t_0)$

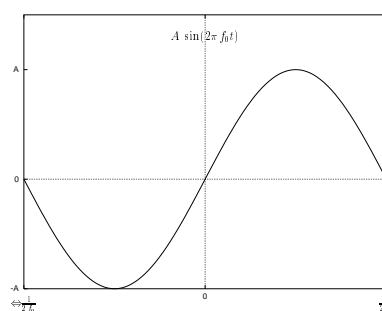
La trasformata di *Fourier* dell'impulso unitario è:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

... semplicemente una costante.

A.7 Seno

$$s(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$$



Il seno è un segnale periodico, quindi è un segnale di potenza e risulta:

$$P_s = \frac{A^2}{2}$$

La trasformata di *Fourier* è quindi formata da impulsi, in particolare da due impulsi centrati nelle frequenze $\Leftrightarrow f_0$ e f_0 :

$$S(f) = \Leftrightarrow \frac{1}{2} j [\delta(f \Leftrightarrow f_0) \Leftrightarrow \delta(f + f_0)]$$

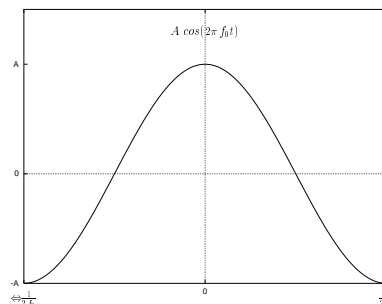
Quindi i coefficienti della serie di *Fourier* esponenziale sono tutti nulli tranne che:

$$S_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$S_{+1} = \Leftrightarrow \frac{1}{2}$$

A.8 Coseno

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$



Il coseno è un segnale periodico, quindi è un segnale di potenza e risulta:

$$P_s = \frac{A^2}{2}$$

La trasformata di *Fourier* è quindi formata da impulsi, in particolare da due impulsi centrati nelle frequenze $\Leftrightarrow f_0$ e f_0 :

$$S(f) = \frac{1}{2}[\delta(f \Leftrightarrow f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Quindi i coefficienti della serie di *Fourier* esponenziale sono tutti nulli tranne che:

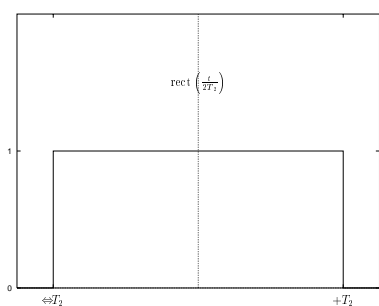
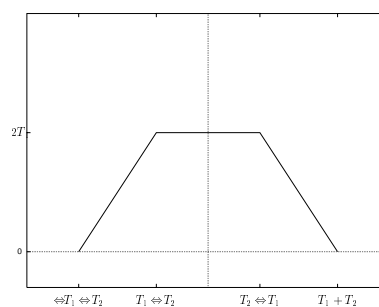
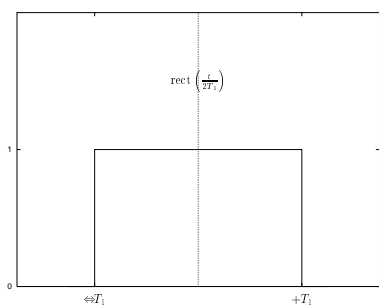
$$S_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$S_{+1} = \frac{1}{2}$$

Appendice B

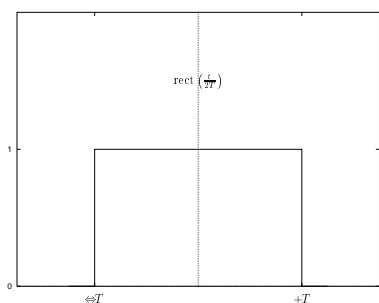
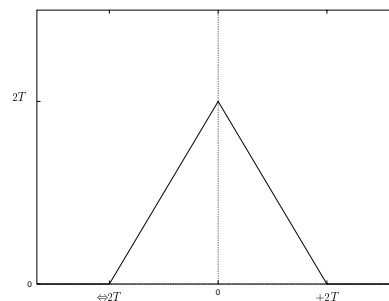
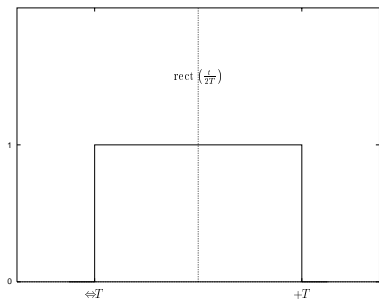
Convoluzioni importanti

B.1 Rettangolo-rettangolo



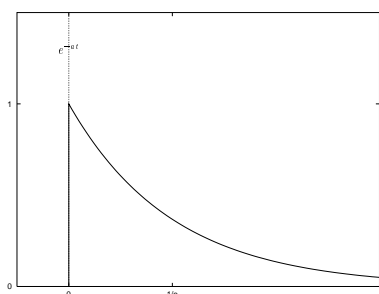
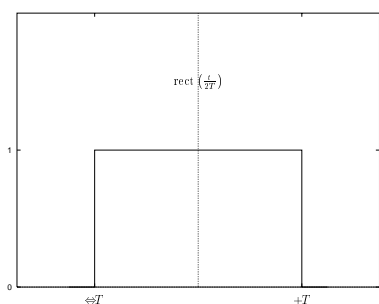
$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{T_1+T_2+t}{T_1} & \Leftrightarrow T_1 \Leftrightarrow T_2 \leq t \leq T_1 \Leftrightarrow T_2 \\ 2T_1 & T_1 \Leftrightarrow T_2 \leq t \leq T_2 \Leftrightarrow T_1 \\ \frac{T_1+T_2-t}{T_1} & T_2 \Leftrightarrow T_1 \leq t \leq T_1 + T_2 \\ 0 & \text{altrove} \end{array} \right.$$

B.1.1 Due rettangoli uguali



$$\begin{cases} 2T \left(1 + \frac{t}{2T}\right) & -2T \leq t \leq 0 \\ 2T \left(1 - \frac{t}{2T}\right) & 0 \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

B.2 Rettangolo-esponenziale



$$\begin{cases} 0 & t < -T \\ \frac{1 - e^{-a(t+T)}}{a} & -T \leq t \leq T \\ e^{-at} \frac{e^{aT} - e^{-aT}}{a} & t > T \end{cases}$$

Appendice C

Distribuzioni continue

C.1 Distribuzione gaussiana

La distribuzione gaussiana (o normale) è forse la distribuzione continua maggiormente utilizzata per modellare molte variabili aleatorie. Essa ha una funzione densità di probabilità:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

e, quindi, una funzione di ripartizione pari a:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{2\sigma^2}} d\xi$$

Queste due funzioni sono rappresentate in figura C.1

L'espressione della funzione di ripartizione $F_X(x)$ non può essere semplificata in una forma chiusa dato che l'integrale in questione non è risolvibile esattamente.

Gli indici che caratterizzano univocamente una distribuzione gaussiana sono:

η valor medio

σ^2 varianza

È possibile passare da una variabile normale con valor medio η e varianza σ^2 ad una variabile normale *standard* ($\eta = 0$ e $\sigma = 1$) mediante la seguente trasformazione:

$$Z = \frac{X - \eta_X}{\sigma_X}$$

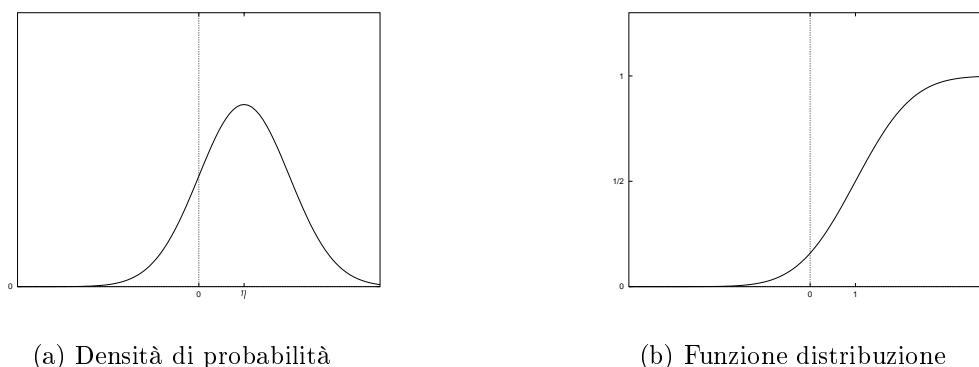


Figura C.1: Funzione densità di probabilità e funzione distribuzione di una variabile gaussiana

dove Z è la normale *standard* e X è la variabile gaussiana qualsiasi.

I momenti di ordine dispari di una variabile normale *standard* sono nulli, mentre quelli di ordine pari sono $E[Z^k] = (k \Leftrightarrow 1)!!$. Quindi, si può dimostrare che i momenti di ordine k per una qualsiasi variabile gaussiana sono:

$$E[X^k] = \sum_{i=0}^k \sigma_X^i \eta_X^i E[Z^i]$$

La trasformata di *Fourier* di un segnale nel tempo distribuito come una variabile gaussiana è ancora una gaussiana, come si evince dalle seguenti relazioni:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \longleftrightarrow e^{-2\pi^2 f^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(t-\eta)^2}{2\sigma^2}} \longleftrightarrow e^{-j2\pi f\eta} e^{-2\pi^2 f^2 \sigma^2}$$

C.2 Distribuzione esponenziale negativa

La distribuzione esponenziale negativa viene utilizzata per modellizzare una variabile aleatoria la cui probabilità diminuisce al suo aumentare, per tendere a zero per valori estremamente grandi.

La funzione distribuzione e la funzione densità sono rappresentate in figura C.2. Esse hanno equazione:

$$F_X(x) = 1 \Leftrightarrow e^{-\mu x}$$

$$f_X(x) = \mu e^{-\mu x}$$

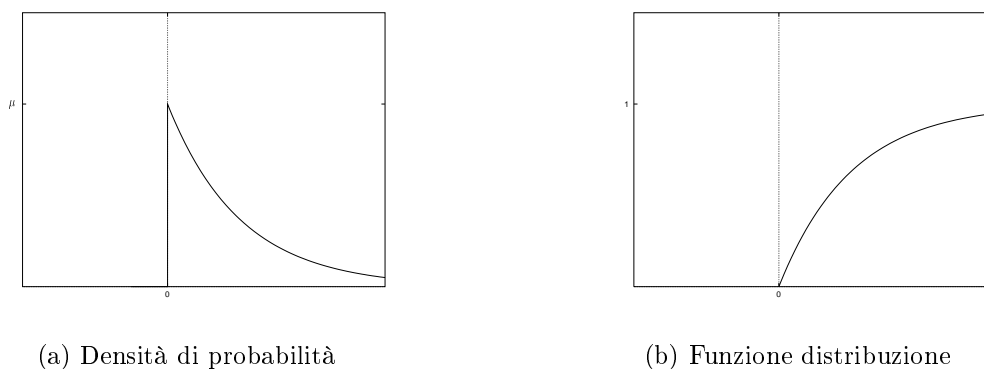


Figura C.2: Funzione densità di probabilità e funzione distribuzione di una variabile esponenziale

Si può dimostrare che la variabile aleatoria distribuita secondo una funzione esponenziale negativa è l'unica variabile continua ad essere senza memoria e cioè:

$$p(X > x + x_0 | X > x_0) = p(X > x)$$

Appendice D

Processi importanti

D.1 Processo di *Bernoulli*

Il processo di *Bernoulli* deriva direttamente dall'esperimento delle prove ripetute. In questo caso, nel processo, le prove vengono ripetute ad ogni passo (il processo è tempo-discreto) e il valore del processo è pari a $+1$ se la prova ha dato successo (probabilità p) ed è pari a $\Leftrightarrow 1$ se la prova ha dato insuccesso (probabilità $1 \Leftrightarrow p$). Il risultato di ogni prova è indipendente dal risultato dell'esperimento all'istante precedente.

$$p(D_n = +1) = p$$

$$p(D_n = \Leftrightarrow 1) = 1 \Leftrightarrow p$$

Il valor medio del processo è:

$$E[D_n] = 2p \Leftrightarrow 1$$

Il valor quadratico medio è:

$$E[D_n^2] = 1$$

La varianza è:

$$E[(D_n \Leftrightarrow E[D_n])^2] = 4p(1 \Leftrightarrow p)$$

D.1.1 Passeggiata casuale

Dal processo di *Bernoulli* si può immediatamente ricavare un altro processo, definito passeggiata casuale, in questo modo:

$$S_n = \sum_{i=1}^n D_i$$

Eccone le caratteristiche:

$$\begin{aligned} E[S_n] &= n(2p \Leftrightarrow 1) \\ E[(S_n \Leftrightarrow E[S_n])^2] &= n p(1 \Leftrightarrow p) \\ E[(S_n \Leftrightarrow E[S_n])(S_k \Leftrightarrow E[S_k])] &= \min(n, k) 4p(1 \Leftrightarrow p) \end{aligned}$$

Infine:

$$p(S_n = 2k \Leftrightarrow n) = \binom{n}{k} p^k (1 \Leftrightarrow p)^{n-k}$$

D.2 Processo di *Poisson*

Il processo di *Poisson* viene utilizzato per formalizzare un esperimento casuale in cui esistono degli “eventi” (richieste da parte di utenti, malfunzionamenti di una strumentazione, ecc.) che possono accadere in istanti di tempo completamente casuali. Nell’ipotesi che il verificarsi di un “evento” in un certo istante di tempo sia indipendente dagli eventi precedenti e nell’ulteriore ipotesi che non ci siano “eventi multipli” in un singolo istante, si può dimostrare che:

$$p(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

dove λ è l’*intensità del processo* e rappresenta il numero medio di “eventi” nell’unità di tempo.

Si può inoltre dimostrare che il *tempo di interarrivo* medio e il *tempo di attesa* medio coincidono e sono pari a λ^{-1} .

D.2.1 Processo telegrafico casuale

Dal processo di *Poisson* è possibile definire un ulteriore processo stocastico detto processo telegrafico casuale che rappresenta lo stato di un sistema bistabile e che può cambiare polarità in istanti di tempo definiti dal processo di *Poisson*. Se i due stati possibili sono $+1$ e $\Leftrightarrow 1$, equamente probabili all’istante $t = 0$, allora si può dimostrare che:

$$P(X(t) = +1) = p(X(t) = \Leftrightarrow 1) = \frac{1}{2}$$

e, quindi: $E[X(t)] = 0$. Inoltre, l’autocorrelazione dipende solo dalla differenza degli istanti di estrazione τ :

$$R_x(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$$

Ciò basta per dimostrare che il processo telegrafico casuale è un processo stazionario almeno in senso lato. In realtà si può dimostrare che è stazionario in senso stretto.