Introduzione alla
TEORIA DEI CAMPI.

M. Toller

1999

Capitolo 1

Sistemi a molte particelle e campi quantistici.

1.1 Particelle identiche e spazi di Fock.

Consideriamo un sistema fisico composto da due sottosistemi descritti dagli spazi di Hilbert $\mathcal{H}'$ ed $\mathcal{H}''$. Se i due sistemi sono in due stati Φ' e Φ'' del tutto scorrelati tra loro, il sistema composto si può descrivere con il vettore $\Phi' \otimes \Phi''$ che appartiene al *prodotto tensoriale* $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ dei due spazi di Hilbert. Infatti, se A' ed A'' sono due operatori in $\mathcal{H}'$ e $\mathcal{H}''$ che descrivono le osservabili $\mathcal{A}'$ ed $\mathcal{A}''$ riguardanti rispettivamente il primo ed il secondo sottosistema, si ha

$$\langle \mathcal{A}' \mathcal{A}'' \rangle = \langle \mathcal{A}' \rangle \langle \mathcal{A}'' \rangle = (\Phi', A' \Phi')(\Phi'', A'' \Phi'') =$$

$$= (\Phi' \otimes \Phi'', (A' \otimes A'') (\Phi' \otimes \Phi'')). \tag{1.1}$$

Il prodotto tensoriale contiene anche somme e limiti di somme di vettori del tipo $\Phi' \otimes \Phi''$; essi descrivono situazioni in cui esistono correlazioni tra i due sottosistemi.

Si può dare una trattazione astratta dei prodotti tensoriali di spazi di Hilbert [1]. Per i nostri scopi, basta osservare che se $\mathcal{H}'$ e $\mathcal{H}''$ sono spazi di funzioni d'onda $\Phi'_{s'}(\mathbf{x}')$ e $\Phi''_{s''}(\mathbf{x}'')$ (eventualmente con indici di spin) al quadrato sommabile, il prodotto tensoriale è formato da funzioni d'onda al quadrato sommabile del tipo $\Phi_{s's''}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$.

Abbiamo visto che gli stati ad una particella formano uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}^{(1)}$ sul quale opera una rappresentazione irriducibile del gruppo di simmetria spazio-temporale; i suoi elementi sono del tipo $\Phi_s^{(1)}(\mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x})$ (o $\tilde{\Phi}_s^{(1)}(\mathbf{k}) = \tilde{f}_s(\mathbf{k})$ se si usa lo spazio degli impulsi). Lo spazio $\mathcal{H}^{(n)}$ degli stati ad n particelle è il prodotto tensoriale di $\mathcal{H}^{(1)}$ n volte con se stesso, che è composto da funzioni d'onda del tipo $\Phi^{(n)}_{s_1\cdots s_n}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$. Nel seguito ometteremo gli indici di spin sottintendendo che ogni volta che si integra su di un argomento della funzione d'onda si deve anche sommare sul corrispondente indice di spin.

L'esperienza mostra che non tutte le funzioni d'onda sopra considerate descrivono stati presenti in natura. Per alcune particelle, dette *bosoni*, ci si deve limitare a funzioni d'onda simmetriche mentre per altre particelle, dette *fermioni*, si devono considerare solo funzioni d'onda antisimmetriche. Nel primo caso la funzione resta invariata quando si scambiano le coordinate e gli indici di spin di due qualunque particelle, mentre nel secondo caso la funzione cambia segno. $\mathcal{H}^{(n)}$ è dunque un prodotto tensoriale simmetrizzato o, rispettivamente, antisimmetrizato.

Allo scopo di trattare in maniera unificata stati con un numero arbitrario ma finito di particelle, introduciamo lo *spazio di Fock* bosonico o fermionico

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \cdots \tag{1.2}$$

dove $\mathcal{H}^{(0)}$ è uno spazio di Hilbert unidimensionale composto dai multipli del vettore normalizzato Φ_0 che rappresenta il vuoto. Un elemento Φ di $\mathcal{H}$ è una successione $\{\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots\}$ con $\Phi^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}$, tale che la norma data da

$$\|\Phi\|^2 = \sum_n \|\Phi^{(n)}\|^2 \tag{1.3}$$

sia finita. Il prodotto scalare è dato da

$$(\Psi, \Phi) = \sum_n (\Psi^{(n)}, \Phi^{(n)}). \tag{1.4}$$

È utile considerare il sottospazio lineare denso $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ che contiene le successioni con solo un numero finito di elementi non nulli.

Dato un vettore $f \in \mathcal{H}^{(1)}$ che rappresenta uno stato ad una particella, si definiscono gli *operatori di distruzione*

$$a(f) : \mathcal{H}^{(n)} \to \mathcal{H}^{(n-1)} \tag{1.5}$$

per mezzo della formula

$$a(f)\Phi_0 = 0,$$

$$[a(f)\Phi^{(n)}](\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1}) = n^{1/2}\int \overline{f(\mathbf{x})}\Phi^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1})\,d\mathbf{x}. \tag{1.6}$$

Gli aggiunti hermitiani

$$a^*(f) : \mathcal{H}^{(n)} \to \mathcal{H}^{(n+1)}, \tag{1.7}$$

definiti da

$$(\Psi^{(n+1)}, a^*(f)\Phi^{(n)}) = (a(f)\Psi^{(n+1)}, \Phi^{(n)}) \tag{1.8}$$

sono gli *operatori di creazione*. Essi si possono scrivere, con qualche calcolo, nella forma

$$[a^*(f)\Phi^{(n)}](\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n+1}) = (n+1)^{1/2}\mathbf{S}_{\pm} f(\mathbf{x}_1)\Phi^{(n)}(\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_{n+1}) =$$

$$= (n+1)^{-1/2}\sum_{p=1}^{n+1}(\pm 1)^{p+1} f(\mathbf{x}_p)\Phi^{(n)}(\mathbf{x}_1,\ldots,\hat{\mathbf{x}}_p,\ldots,\mathbf{x}_{n+1}). \tag{1.9}$$

Il segno superiore si riferisce ai bosoni ed il segno inferiore ai fermioni; la stessa convenzione sarà usata nel seguito. Il simbolo $\mathbf{S}_{\pm}$ indica la simmetrizzazione o l'antisimmetrizzazione della funzione d'onda. Il segno ˆ significa che la variabile $\mathbf{x}_p$ va omessa. In particolare, per $n = 0$ si ha

$$b(f)\Phi_0 = f. \tag{1.10}$$

Si noti che gli operatori $a(f)$ ed $a^*(f)$ conservano le proprietà di simmetria delle funzioni d'onda. Essi si possono estendere per linearità a tutto lo spazio $\mathcal{D}$, ma nel caso bosonico essi non sono operatori limitati e dunque non si possono definire su tutto $\mathcal{H}$. Nel seguito non discuteremo in dettaglio i domini di definizione dei vari operatori. Dalle equazioni (1.6) e (1.9) si ottengono le seguenti relazioni di commutazione degli operatori bosonici o di anticommutazione degli operatori fermionici:

$$[a(f), a(g)]_{\mp} = a(f)a(g) \mp a(g)a(f) = 0,$$

$$[a^*(f), a^*(g)]_{\mp} = a^*(f)a^*(g) \mp a^*(g)a^*(f) = 0,$$

$$[a(f), a^*(g)]_{\mp} = a(f)a^*(g) \mp a^*(g)a(f) = (f,g). \tag{1.11}$$

La prima segue immediatamente dalla definizione (1.6). La seconda si ottiene dalla prima con l'operazione di coniugazione. La terza si dimostra più facilmente scrivendola nella forma

$$(a^*(f)\Psi^{(n)}, a^*(g)\Phi^{(n)}) \mp (a(g)\Psi^{(n)}, a(f)\Phi^{(n)}) = (\Psi^{(n)}, \Phi^{(n)})(f,g), \tag{1.12}$$

dove $\Psi^{(n)}, \Phi^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}$ sono vettori arbitrari.

Se $U^{(1)}$ è un operatore unitario che agisce su $\mathcal{H}^{(1)}$, (per esempio un operatore di simmetria) si definiscono in modo naturale gli operatori

$$U^{(2)} = U^{(1)} \otimes U^{(1)}, \qquad U^{(3)} = U^{(1)} \otimes U^{(1)} \otimes U^{(1)}\ , \ldots$$

$$U = 1 \oplus U^{(1)} \oplus U^{(2)} \oplus U^{(3)} \oplus \cdots, \tag{1.13}$$

che agiscono rispettivamente negli spazi $\mathcal{H}^{(2)}$, $\mathcal{H}^{(3)} \ldots$ e nello spazio di Fock $\mathcal{H}$. Dalle definizioni (1.6), (1.9) si ottenegono le proprietà

$$a(U^{(1)}f) = Ua(f)U^{-1}, \qquad a^*(U^{(1)}f) = Ua^*(f)U^{-1}. \tag{1.14}$$

I vettori del tipo

$$a^*(g_1)a^*(g_2)\cdots a^*(g_n)\Phi_0 \tag{1.15}$$

e le loro combinazioni lineari formano un insieme denso in $\mathcal{H}^{(n)}$. Infatti, qualunque funzione d'onda ad n particelle rappresentabile come un prodotto simmetrizzato o antisimmetrizzato si può esprimere in questa forma.

Gli operatori di creazione e di distruzione permettono di scrivere in maniera compatta gli operatori che agiscono su stati con un numero arbitrario di particelle, ma sono la somma di contributi che riguardano singole particelle o coppie di particelle etc. [2]. Consideriamo per esempio un sistema di particelle che interagiscono con un campo esterno ma non interagiscono tra di loro. L'hamiltoniano H del sistema è determinato dall'hamiltoniano $H^{(1)}$ che agisce sugli stati ad una particella e quando agisce su $\mathcal{H}^{(n)}$ è dato dalla somma di n termini, uno per particella. In particolare, si ha

$$Ha^*(g_1)\cdots a^*(g_n)\Phi_0 =$$

$$= a^*(H^{(1)}g_1)\cdots a^*(g_n)\Phi_0 + \ldots + a^*(g_1)\cdots a^*(H^{(1)}g_n)\Phi_0. \tag{1.16}$$

Se introduciamo una base $\{f_i\}$ in $\mathcal{H}^{(1)}$, possiamo scrivere

$$H^{(1)}g = \sum_k H^{(1)}f_k(f_k, g) = \sum_{ik} H_{ik} f_i (f_k, g), \tag{1.17}$$

dove

$$H_{ik} = (f_i, H^{(1)}f_k). \tag{1.18}$$

Vediamo che si può porre

$$H = \sum_k a^*(H^{(1)}f_k)a(f_k) = \sum_{ik} H_{ik}a^*(f_i)a(f_k). \tag{1.19}$$

Infatti, si ha

$$H\Phi_0 = 0 \tag{1.20}$$

e dalla identità

$$[A, BC] = [A, B]_{\mp}C \pm B[A, C]_{\mp} \tag{1.21}$$

si ottiene

$$[H, a^*(g)] = \sum_k a^*(H^{(1)}f_k)(f_k, g) = a^*(H^{(1)}g). \tag{1.22}$$

La (1.16) segue immediatamente e la espressione (1.19) per l'hamiltoniano vale in un sottospazio denso di $\mathcal{H}$.

In modo simile si trattano gli altri operatori ad una particella come le componenti della quantità di moto e del momento angolare etc., in particolare, l'operatore

$$N = \sum_k a^*(f_k)a(f_k) \tag{1.23}$$

rappresenta il numero di particelle ed ha, ovviamente, la proprietà

$$N\Phi^{(n)} = n\Phi^{(n)}. \tag{1.24}$$

Un esempio di operatore a due particelle è il potenziale di interazione a coppie

$$V^{(n)} = \sum_{1\le p<q\le n} V^{(2)}(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q), \qquad V^{(2)}(\mathbf{x}) = V^{(2)}(-\mathbf{x}). \tag{1.25}$$

Consideriamo i vettori $f_{ik} = \pm f_{ki} \in \mathcal{H}^{(2)}$ ortogonali (ma non normalizzati) definiti da

$$f_{ik}(x_1, x_2) = 2^{-1}\left(f_i(x_1)f_k(x_2) \pm f_k(x_1)f_i(x_2)\right). \tag{1.26}$$

Essi soddisfano la proprietà di completezza

$$\Phi^{(2)} = \sum_{ik} f_{ik}(f_{ik}, \Phi^{(2)}). \tag{1.27}$$

e si ha

$$V^{(2)}\phi^{(2)} = \sum_{ikrs} V_{ikrs} f_{ik}(f_{rs}, \Phi^{(2)}), \tag{1.28}$$

dove

$$V_{ikrs} = (f_{ik}, V^{(2)}f_{rs}). \tag{1.29}$$

Più esplicitamente si può scrivere

$$[V^{(2)}\Phi^{(2)}](\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) =$$

$$= \sum_{ikrs} V_{ikrs} f_i(\mathbf{x}_1) f_k(\mathbf{x}_2) \int\int \overline{f_r(\mathbf{x}') f_s(\mathbf{x}'')} \Phi^{(2)}(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')\, d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' \tag{1.30}$$

e nel caso generale, usando la proprietà di simmetria o di antisimmetria della funzione d'onda,

$$[V^{(n)}\Phi^{(n)}](\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) = \sum_{ikrs} V_{ikrs} \sum_{p<q} (\pm 1)^{p+q+1} f_i(\mathbf{x}_p) f_k(\mathbf{x}_q) \cdot$$

$$\cdot \int\int \overline{f_r(\mathbf{x}') f_s(\mathbf{x}'')} \Phi^{(n)}(\mathbf{x}',\mathbf{x}'',\mathbf{x}_1,\ldots,\hat{\mathbf{x}}_p,\ldots,\hat{\mathbf{x}}_q,\ldots,\mathbf{x}_n)\, d\mathbf{x}' d\mathbf{x}''. \tag{1.31}$$

Segue che

$$(\Psi^{(n)}, V^{(n)}\Phi^{(n)}) = \sum_{ikrs} V_{ikrs} \frac{n(n-1)}{2} \int f_i(\mathbf{y}',) f_k(\mathbf{y}'') \overline{\Psi^{(n)}(\mathbf{y}',\mathbf{y}'',\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-2})} \cdot$$

$$\cdot \int\int \overline{f_r(\mathbf{x}') f_s(\mathbf{x}'')} \Phi^{(n)}(\mathbf{x}',\mathbf{x}'',\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-2})\, d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' d\mathbf{y}' d\mathbf{y}'' d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_{n-2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ikrs} V_{ikrs} \left(a(f_k) a(f_i) \Psi^{(n)}, a(f_s) a(f_r) \Phi^{(n)} \right) \tag{1.32}$$

e dunque

$$V = \tfrac{1}{2} \sum_{ikrs} a^*(f_i) a^*(f_k) V_{ikrs} a(f_s) a(f_r). \tag{1.33}$$

1.2 Campi quantizzati non relativistici.

Dato che $a(f)$ dipende linearmente dalla funzione $\overline{f(\mathbf{x})}$, si può scrivere

$$a(f) = \int \phi(\mathbf{x})\overline{f(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}, \qquad a^*(f) = \int \phi^*(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{1.34}$$

dove i *campi* $\phi(\mathbf{x})$ e $\phi^*(\mathbf{x})$ sono distribuzioni [3, 4] a valori operatoriali. Queste formule hanno senso per $f \in L_2(\mathbf{R}^3)$, ma per i futuri sviluppi della teoria conviene considerare funzioni di prova più regolari, ad esempio richiedere $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$, lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili che tendono a zero all'infinito assieme a tutte le loro derivate parziali più rapidamente di ogni potenza negativa della distanza.

Sostituendo nella (1.11), si ha

$$\int [\phi(\mathbf{x}), \phi^*(\mathbf{y})]_\pm \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{y})\, d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{1.35}$$

che, in termini di distribuzioni [3, 4] si scrive

$$[\phi(\mathbf{x}), \phi^*(\mathbf{y})]_\pm = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{1.36}$$

In modo analogo si ottiene

$$[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})]_\pm = 0, \qquad [\phi^*(\mathbf{x}), \phi^*(\mathbf{y})]_\pm = 0. \tag{1.37}$$

Queste sono le relazioni di commutazione o di anticommutazione dei campi. Dalla (1.36) si vede che i campi non sono funzioni a valore operatoriale di $\mathbf{x}$, ma distribuzioni di natura più singolare. In altre parole, non esiste l'operatore $\phi(\mathbf{x})$, ma solo operatori del tipo (1.34) dove $f(\mathbf{x})$ è una funzione abbastanza regolare.

Dalle (1.6), (1.34) si ottiene

$$(\Phi_0, \phi(\mathbf{x})\Phi^{(1)}) = \Phi^{(1)}(\mathbf{x}). \tag{1.38}$$

cioè la funzione d'onda è data come un elemento di matrice del campo, nel senso della teoria delle distribuzioni. Un risultato simile vale per stati a più particelle.

Se si introducono le (1.34) nella (1.23) e si usa la relazione di completezza

$$\sum_i f_i(\mathbf{x})\overline{f_i(\mathbf{y})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{1.39}$$

si ottiene

$$N = \int \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{1.40}$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \phi^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}). \tag{1.41}$$

Si noti che un prodotto di distribuzioni come quello che compare in questa formula non è in generale un oggetto ben definito. È possibile in certi casi dare un significato a prodotti di campi nello stesso punto, ma solo quando tutti gli operatori di creazione stanno a sinistra degli operatori di distruzione, cioè quando il prodotto è *normale*. Per non appesantire il formalismo, nel seguito non insisteremo sul carattere singolare degli "operatori" di campo.

In modo simile, dalla (1.19), se si usa l'hamiltoniano di Schrödinger

$$H^{(1)} = -(2m)^{-1}\Delta + V^{(1)}, \tag{1.42}$$

si ottiene, integrando per parti ed usando la relazione di completezza,

$$H = \int (-(2m)^{-1}\Delta + V^{(1)}(\mathbf{x}))\phi^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{1.43}$$

Integrando ancora per parti (questo è possibile se si considera un elemento di matrice tra stati le cui funzioni d'onda tendono a zero rapidamente all'infinito) si ottiene

$$H = \int ((2m)^{-1}\partial_i\phi^*(\mathbf{x})\partial_i\phi(\mathbf{x}) + V^{(1)}(\mathbf{x})\phi^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{1.44}$$

Sotto il segno di integrale compare un campo hermitiano che si può interpretare come densità di energia. Dalla (1.33) si ottiene

$$V = \tfrac{1}{2}\int\int \phi^*(\mathbf{x})\phi^*(\mathbf{y})V^{(2)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}d\mathbf{y}. \tag{1.45}$$

Per le componenti della quantità di moto si ha

$$P^{(1)i} = -i\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{1.46}$$

$$P^i = m\int J^i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{1.47}$$

$$J^i(\mathbf{x}) = i(2m)^{-1}(\partial_i\phi^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) - \phi^*(\mathbf{x})\partial_i\phi(\mathbf{x})). \tag{1.48}$$

Per le componenti del momento angolare otteniamo

$$M^{(1)i} = \epsilon^{ijk} x^j P^{(1)k}, \tag{1.49}$$

$$M^i = \epsilon^{ijk} \int x^j J^k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{1.50}$$

Fino ad ora, abbiamo considerato il sistema ad un tempo fissato. Per introdurre la dipendenza temporale, usiamo il formalismo di Heisenberg in cui gli operatori di campo dipendono dal tempo secondo l'equazione

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t) = [\phi(\mathbf{x}, t), H]. \tag{1.51}$$

Il commutatore si può calcolare a partire dalle relazioni di commutazione o di anticommutazione dei campi usando la (1.21). Se si usa l'hamiltoniano (1.44) con l'aggiunta del potenziale a due particelle (1.45), si ottiene

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{2m}\Delta\phi(\mathbf{x}, t) + V^{(1)}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}, t) + \\ &+ \int \phi^*(\mathbf{y}, t)\phi(\mathbf{y}, t)V^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\phi(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Si noti che in assenza di interazioni tra particelle il campo, che in questo caso di dice *libero*, soddisfa l'equazione di Schrödinger. In generale, i campi liberi soddisfano ad equazioni lineari e di conseguenza un campo al tempo t dipende linearmente dai campi al tempo 0. Ne segue che anche i commutatori di campi a tempi diversi sono distribuzioni a valori numerici (non operatoriali). Nel caso in cui $V^{(1)}(\mathbf{x}) = 0$ si ha

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi^*(\mathbf{x}', t')]_\pm = (2\pi)^{-3} \int \exp(i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega(t - t'))\, d\mathbf{k}, \tag{1.53}$$

$$\omega = (2m)^{-1}\mathbf{k}^2. \tag{1.54}$$

Infatti questa espressione coincide con la (1.36) per $t = t'$ e soddisfa alla equazione di Schrödinger nelle variabili $\mathbf{x}, t$. Si vede dalla (1.52) che l'interazione tra particelle comporta l'apparire di termini non lineari (nel nostro caso di terzo grado) nella equazione di campo. In questo caso i commutatori di campi a tempi diversi sono distribuzioni a valore operatoriale (non numerico).

Dalla (1.52) si ottiene (anche in presenza di interazione) la formula

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \partial_i J^i(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{1.55}$$

che rappresenta in forma operatoriale l'equazione di continuità per il numero di particelle. I generatori delle trasformazioni di Galilei pure, che contengono il tempo esplicitamente, hanno la forma

$$N^{(1)i} = tP^{(1)i} - mx^i, \tag{1.56}$$

$$N^i = m \int (tJ^i(\mathbf{x}, t) - x^i \rho(\mathbf{x}, t))\, d\mathbf{x}. \tag{1.57}$$

Quanto esposto nelle ultime due sezioni può essere considerato come un formalismo conveniente per trattare sistemi a più particelle. Esso suggerisce però anche una interpretazione fisica che va oltre questo aspetto e che acquisterà una importanza fondamentale nella teoria relativistica. Infatti, gli operatori di campo non si riferiscono più alle singole particelle, ma ai punti dello spazio. Data una regione $\mathcal{O}$ dello spazio, possiamo esprimere in termini dei campi le osservabili che si possono misurare operando esclusivamente in questa regione.

Si deve ricordare che in una teoria non relativistica la massa introduce una regola di superselezione, cioè le relazioni di fase tra stati di massa diversa non sono osservabili. Ne segue che operatori che hanno elementi di matrice non nulli tra stati con un numero diverso di particelle non possono rappresentare osservabili. Se introduciamo le trasformazioni di gauge (di prima specie, cioè con θ costante)

$$\phi(\mathbf{x}) \to \exp(-iN\theta)\phi(\mathbf{x}) \exp(iN\theta) = \exp(i\theta)\phi(\mathbf{x}),$$

$$\phi^*(\mathbf{x}) \to \exp(-iN\theta)\phi^*(\mathbf{x}) \exp(iN\theta) = \exp(-i\theta)\phi^*(\mathbf{x}), \tag{1.58}$$

possiamo affermare che solo gli operatori gauge-invarianti, costruiti con operatori di creazione e di distruzione in egual numero, possono rappresentare osservabili.

Se applichiamo una osservabile A al vuoto, otteniamo ancora un multiplo del vuoto, cioè abbiamo

$$A\Phi_0 = a\Phi_0. \tag{1.59}$$

In altre parole il vuoto è un autovettore di tutte le osservabili e dunque nel vuoto le osservabili hanno un valore ben preciso senza fluttuazioni e senza correlazioni. Vedremo che questa proprietà del vuoto, che sembra del tutto naturale, non vale nel caso relativistico.

Consideriamo l'algebra $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ che contiene i prodotti di campi integrati con opportune funzioni peso che si annullano fuori di $\mathcal{O}$ e l'algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$

costituita dagli elementi gauge-invarianti di $\mathcal{F}(\mathcal{O})$. È naturale assumere che gli operatori autoaggiunti appartenenti ad $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ rappresentino le osservabili della regione $\mathcal{O}$. Dalle relazioni di (anti)commutazione (1.11) si vede che osservabili a tempi eguali che appartengono a regioni disgiunte sono rappresentate da operatori che commutano e dunque sono compatibili. Nel caso fermionico, si deve ricordare che le osservabili contengano solo potenze pari dei campi.

Il valore di aspettazione nel vuoto (VEV) di una espressione che contiene i campi si può calcolare a partire dai valori di aspettazione di prodotti del tipo

$$\langle A_1 \cdots A_n \rangle_0 = (\Phi_0, A_1 \cdots A_n \Phi_0), \tag{1.60}$$

dove $A_1 \cdots A_n$ sono campi od operatori di creazione e distruzione. Per la trattazione di valori di aspettazione (EV) di prodotti (anche in stati diversi dal vuoto) è utile introdurre il concetto di valore di aspettazione troncato (TEV o TVEV se ci si riferisce al vuoto) per mezzo delle seguenti formule:

$$\begin{gathered} \langle A_1 \rangle = \langle A_1 \rangle^T, \\ \langle A_1 A_2 \rangle = \langle A_1 A_2 \rangle^T + \langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle, \\ \langle A_1 A_2 A_3 \rangle = \langle A_1 A_2 A_3 \rangle^T + \\ + \langle A_1 A_2 \rangle^T \langle A_3 \rangle + \langle A_1 \rangle \langle A_2 A_3 \rangle^T \pm \langle A_1 A_3 \rangle^T \langle A_2 \rangle + \langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle \langle A_3 \rangle, \end{gathered} \tag{1.61}$$

eccetera. A secondo membro compaiono tutte le partizioni degli operatori in "clusters" e l'ordine degli operatori in ogni cluster è lo stesso che compare a primo membro. Il segno meno compare se per passare dalla sequenza di operatori a primo membro alla sequenza complessiva che compare in un termine a secondo membro occorre un numero dispari di scambi di operatori fermionici. Si assume che i TEV che contengono un numero dispari di operatori fermionici siano nulli. Da queste formule si ricavano facilmente i TEV in funzione dei valori di aspettazione ordinari.

Se il commutatore (o l'anticommutatore per operatori fermionici) è una distribuzione a valori numerici, si ha

$$\langle A_1 \cdots B C D_1 \cdots \rangle \mp \langle A_1 \cdots C B D_1 \cdots \rangle = [BC]_\mp \langle A_1 \cdots D_1 \cdots \rangle \tag{1.62}$$

Sviluppando entrambi i membri in TEV, si ottiene nei casi più semplici

$$\langle BC \rangle^T \mp \langle CB \rangle^T = [BC]_\mp, \tag{1.63}$$

$$\langle ABC\rangle^T \mp \langle ACB\rangle^T = 0, \tag{1.64}$$

$$\langle BCD\rangle^T \mp \langle CBD\rangle^T = 0. \tag{1.65}$$

In generale, a primo membro sopravvivono solo i termini in cui B e C stanno nello stesso cluster; se questo cluster non contiene altri operatori, esso si elide con un analogo termine che compare a secondo membro. Ne segue che l'espressione

$$\langle A_1 \cdots BCD_1 \cdots\rangle^T \mp \langle A_1 \cdots CBD_1 \cdots\rangle^T \tag{1.66}$$

è eguale ad una somma di termini che contengono un fattore dello stesso tipo, ma con un numero minore di operatori. Ragionando per ricorrenza, si vede che tutte queste espressioni si annullano. Segue che i TEV con più di due operatori sono simmetrici (o antisimmetrici) per lo scambio dei fattori.

Il VEV di un prodotto normale è evidentemente nullo e lo stesso si può dire dei TVEV. Se gli (anti)commutatori sono distribuzioni numeriche, tutti i TVEV con tre o più operatori non dipendono dall'ordine degli operatori e dunque si annullano. Ne segue che ogni VEV si esprime facilmente in termini di TVEV di due operatori. Uno stato definito da valori di aspettazione con questa proprietà si dice *quasi libero.* Nel caso del campo libero si ha

$$\begin{gathered}\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_o^T = 0, \qquad \langle\phi^*(x)\phi^*(y)\rangle_o^T = 0, \\ \langle\phi^*(x)\phi(y)\rangle_o^T = 0, \qquad \langle\phi(x)\phi^*(y)\rangle_o^T = [\phi(x)\phi^*(y)]_\mp.\end{gathered} \tag{1.67}$$

1.3 Stati con temperatura e densità finite.

Il formalismo dei campi quantistici permette di trattare anche stati che non appartengomo allo spazio di Fock. Per esempio, se tutto lo spazio è riempito da un gas all'equilibrio termico, la probabilità di avere un numero n finito di particelle è nulla e la proiezione dello stato su di un qualunque sottospazio $\mathcal{H}^{(n)}$ dello spazio di Fock è nulla.

Per trattare una situazione di questo tipo conviene considerare dapprima un sistema racchiuso in un volume finito $\mathcal{V}$, con opportune condizioni al contorno sulle pareti. In tal caso l'hamiltoniano ha uno spettro discreto di autovalori e si possono utilizzare i metodi elementari della meccanica statistica quantistica per calcolare le medie gran-canoniche delle varie osservabili. Alla fine si considera il *limite termodinamico* $\mathcal{V} \to \infty$ con temperatura β^{-1} e potenziale chimico μ costanti. La media gran-canonica è particolarmente adatta a questo scopo perchè, se si considera una parte finita di un sistema infinito, la parte restante del sistema funge da termostato e da serbatoio di particelle.

Considereremo in dettaglio un gas di particelle non interagenti racchiuse nel volume $\mathcal{V}$. Introduciamo nello spazio $\mathcal{H}^{(1)}$ una base f_i composta di autostati della hamiltoniana ad una particella:

$$H^{(1)} f_i = \omega_i f_i. \tag{1.68}$$

Gli autostati di H normalizzati hanno la forma

$$\Phi_{n_0 n_1 \dots} = (n_0!\, n_1! \cdots)^{-1/2} (a_0^{n_0} a_1^{n_1} \cdots)^* \Phi_0, \tag{1.69}$$

con

$$n = \sum_i n_i < \infty, \qquad E = \sum_i n_i \omega_i. \tag{1.70}$$

Solo un numero finito dei *numeri di occupazione* n_i non sono nulli. Nel caso fermionico essi prendono solo i valori $n_i = 0, 1$, mentre nel caso bosonico tutti i valori interi non negativi sono ammessi.

La media gran-canonica di un operatore A è data dalla formula

$$\langle A \rangle = \frac{\mathrm{Tr}\,(A \exp(-\beta(H - \mu N)))}{\mathrm{Tr} \exp(-\beta(H - \mu N))} =$$

$$= \frac{\sum_{n_0 n_1 \dots} (\Phi_{n_0 n_1 \dots}, A \Phi_{n_0 n_1 \dots}) \exp\left(-\beta \sum_i n_i(\omega_i - \mu)\right)}{\sum_{n_0 n_1 \dots} \exp\left(-\beta \sum_i n_i(\omega_i - \mu)\right)}. \tag{1.71}$$

Questa formula ha senso solo se H ha uno spettro discreto e non si può applicare direttamente al sistema infinito.

Se A è un prodotto di operatori di creazione e di distruzione, si vede subito che $\langle A \rangle = 0$ a meno che a_i^* ed a_i non compaiano lo stesso numero di volte ν_i. Nel caso fermionico, inoltre, deve essere $\nu_i \leq 1$. In particolare, si vede che solo operatori gauge-invarianti possono avere valore di aspettazione non nullo. In altre parole, lo stato $A \to \langle A \rangle$ è gauge-invariante. Usando l'espansione in TVEV introdotta nel capitolo precedente, si ottiene

$$\langle a_0^{n_0} a_1^{n_1} \cdots (a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \cdots)^* a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \cdots (a_0^{n_0} a_1^{n_1} \cdots)^* \rangle_0 =$$

$$= \frac{(n_0!\, n_1! \cdots)^2}{(n_0 - \nu_0)!\, (n_1 - \nu_1)! \cdots}, \tag{1.72}$$

e dunque

$$(\Phi_{n_0 n_1 \ldots}, (a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \cdots)^* a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \cdots \Phi_{n_0 n_1 \ldots}) = \frac{n_0!\, n_1! \cdots}{(n_0 - \nu_0)!\, (n_1 - \nu_1)! \cdots}. \tag{1.73}$$

Si noti che $0! = 1$ e che le espressioni che contengono a denominatore il fattoriale di un intero negativo sono, per convenzione, considerate nulle.

Dalla (1.71) si ottiene

$$\langle (a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \cdots)^* a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \cdots \rangle = \langle (a_0^{\nu_0})^* a_0^{\nu_0} \rangle \; \langle (a_1^{\nu_1})^* a_1^{\nu_1} \rangle \cdots, \tag{1.74}$$

dove, tralasciando gli indici $0, 1, \ldots$, si ha

$$\langle (a^\nu)^* a^\nu \rangle = \frac{\sum_{n \geq \nu} \frac{n!}{(n-\nu)!} \exp\left(-\beta n(\omega - \mu)\right)}{\sum_n \exp\left(-\beta n(\omega - \mu)\right)}. \tag{1.75}$$

Nel caso fermionico si ha $n = 0, 1$ e si ottiene subito

$$\langle (a^\nu)^* a^\nu \rangle = 0, \qquad \nu > 1,$$

$$\langle a^* a \rangle = \langle N \rangle = \left(\exp(\beta(\omega - \mu)) + 1\right)^{-1}. \tag{1.76}$$

Anche nel caso bosonico le serie di potenze si possono sommare esplicitamente utilizzando la formula

$$\sum_{n \geq \nu} \frac{n!}{(n-\nu)!} z^{n-\nu} = \nu! (1 - z)^{-\nu - 1}, \qquad |z| < 1, \tag{1.77}$$

che si ottiene derivando ν volte la nota formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1-z)^{-1}. \tag{1.78}$$

Il risultato è

$$\langle (a^\nu)^* a^\nu \rangle = \nu! \, \langle a^* a \rangle^\nu, \tag{1.79}$$

$$\langle a^* a \rangle = \langle N \rangle = \left(\exp(\beta(\omega - \mu)) - 1\right)^{-1}. \tag{1.80}$$

Per calcolare i valori di aspettazione di prodotti non normali, conviene introdurre lo sviluppo in TEV descritto nella Sezione precedente. Confrontando questo sviluppo con le formule per le medie gran-canoniche che abbiampo ricavato, vediamo che i TEV di un solo operatore si annullano. Si vede anche che nella espansione dei valori di aspettazione dei prodotti normali è sufficiente considerare solo TEV di due operatori. Ne segue che i TEV di prodotti normali di più di due operatori si annullano. Abbiamo visto che per campi liberi i TEV con più di due operatori sono simmetrici (o antisimmetrici) per lo scambio dei fattori. Ne segue che tutti i TEV di tre o più operatori sono zero anche per prodotti di tipo generale. Abbiamo dunque mostrato che, per particelle non interagenti, le medie gran-canoniche in un volume finito definiscono uno stato quasi libero. Questa proprietà vale anche dopo il limite termodinamico. Essa permette di calcolare facilmente il valore di aspettazione del prodotto di un numero qualsiasi di campi se si conoscono i valori di aspettazione dei prodotti di due campi.

Dalle (1.34) e dalla completezza degli stati $\{f_i\}$ si ha (nel senso della teoria delle distribuzioni)

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_i f_i(\mathbf{x}) a_i. \tag{1.81}$$

e, siccome

$$[H, a_i] = -\omega_i a_i, \tag{1.82}$$

in accordo con la (1.51) abbiamo

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}) \exp(-i\omega_i t) a_i. \tag{1.83}$$

Pertanto

$$\langle \phi^*(\mathbf{x}', t') \phi(\mathbf{x}, t) \rangle = \sum_{ik} \overline{f_i(\mathbf{x}')} f_k(\mathbf{x}) \exp(i\omega_i t' - i\omega_k t) \langle a_i^* a_k \rangle =$$

$$= \sum_i \overline{f_i(\mathbf{x}')} f_i(\mathbf{x}) \exp(-i\omega_i(t-t')) \left(\exp(\beta(\omega_i - \mu)) \mp 1\right)^{-1}. \tag{1.84}$$

Se il volume $\mathcal{V}$ è un cubo di spigolo l centrato attorno all'origine, ed imponiamo condizioni di periodicità al contorno, abbiamo

$$f_i(\mathbf{x}) = l^{-3/2} \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}), \qquad \omega_i = (2m)^{-1}\mathbf{k}_i^2, \tag{1.85}$$

dove le componenti del vettore $\mathbf{k}_i$ sono multipli interi di $2\pi l^{-1}$. Dunque

$$\langle \phi^*(\mathbf{x}', t')\phi(\mathbf{x}, t)\rangle = (2\pi)^{-3} \sum_i \left(\frac{2\pi}{l}\right)^3 \cdot$$

$$\cdot \exp(i\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega_i(t-t')) \left(\exp(\beta(\omega_i - \mu)) \mp 1\right)^{-1}. \tag{1.86}$$

Nel caso fermionico o nel caso bosonico con $\mu < 0$, l'espressione da sommare è una funzione continua e limitata di $\mathbf{k}_i$ e pertanto nel limite termodinamico $l \to \infty$ abbiamo

$$\langle \phi^*(\mathbf{x}', t')\phi(\mathbf{x}, t)\rangle =$$

$$= (2\pi)^{-3} \int \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega(t-t')) \left(\exp(\beta(\omega - \mu)) \mp 1\right)^{-1} d\mathbf{k}. \tag{1.87}$$

Nel caso bosonico, quando $\mu \to 0$ tutti i numeri medi di occupazione tendono ad un limite finito, meno $\langle N_0 \rangle$ che tende all'infinito come $(-\beta\mu)^{-1}$. Il corrispondente termine deve essere aggiunto all'integrale e se nel limite termodinamico si richiede che la densità $\rho_0 = \mathcal{V}^{-1}\langle N_0\rangle$ tenda ad un limite finito, si deve porre

$$\mu \simeq -(\beta \mathcal{V} \rho_0)^{-1}. \tag{1.88}$$

Eseguendo il limite termodinamico in questo modo, si ottiene

$$\langle \phi^*(\mathbf{x}', t')\phi(\mathbf{x}, t)\rangle = \rho_0 +$$

$$+ (2\pi)^{-3} \int \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega(t-t')) \left(\exp(\beta\omega) - 1\right)^{-1} d\mathbf{k}. \tag{1.89}$$

Questo è il fenomeno della condensazione di Bose. Si noti che la funzione integranda ha una singolarità nell'origine sommabile in tre dimensioni ma non in due o una dimensione. In questi due casi, quando $\mu \to 0$, la densità $\langle \rho(x) \rangle$ tende all'infinito e non si ha condensazione di Bose.

Il valore di aspettazione $\langle \phi(\mathbf{x}, t)\phi^*(\mathbf{x}', t')\rangle$ si ottiene utilizzando la relazione di (anti)commutazione (1.53) e tutti gli altri valori di aspettazione si esprimono come somme di prodotti di quelli sopra calcolati. Per esempio, si ha

$$\begin{aligned}\langle\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')\rangle &= \langle\rho(\mathbf{x})\rangle\langle\rho(\mathbf{x}')\rangle + \langle\phi^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}')\rangle\langle\phi(\mathbf{x})\phi^*(\mathbf{x}')\rangle = \\ &= \langle\rho(\mathbf{x})\rangle\langle\rho(\mathbf{x}')\rangle + \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\langle\rho(\mathbf{x})\rangle \pm |\langle\phi^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}')\rangle|^2. \end{aligned} \tag{1.90}$$

Si vede che per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ la correlazione di densità è positiva per bosoni e negativa per fermioni.

Si noti che, in assenza di condensazione di Bose, l'espressione (1.87) è la trasformata di Fourier di una funzione infinitamente differenziabile e dunque tende a zero molto rapidamente per $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\| \to \infty$. In presenza di condensazione di Bose, invece, si ha nello stesso limite

$$\langle\phi^*(\mathbf{x}',t')\phi(\mathbf{x},t)\rangle \simeq \rho_0 + (2\pi\beta)^{-1}m\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^{-1}. \tag{1.91}$$

Compaiono dunque correlazioni a lungo range, che studieremo più approfonditamente in una prossima Sezione, dove vedremo anche che lo stato costruito a partire dalle medie gran-canoniche non è il più adatto per descrivere la condensazione di Bose.

In conclusione, per un gas di particelle non interagenti, siamo in grado di calcolare il valore di aspettazione di una qualunque espressione polinomiale contenente i campi. Notiamo che una regola che assegna coerentemente un valore di aspettazione a tutte le osservabili descrive completamente dal punto di vista fisico uno stato del sistema. Nello studio del gas infinito abbiamo introdotto degli stati (descritti da valori di aspettazione sull'algebra delle osservabili), che non si possono descrivere per mezzo di vettori od operatori densità nello spazio di Fock. Si dimostra che in ogni caso è possibile costruire (per mezzo della costruzione di GNS) una rappresentazione dell'algebra delle osservabili per mezzo di operatori in un altro spazio di Hilbert in modo che lo stato considerato sia descritto da un vettore di questo spazio. Abbiamo dunque un esempio in cui l'algebra delle osservabili ha più rappresentazioni non unitariamente equivalenti tra di loro, distinte dai parametri β, μ e, se $\mu = 0$, anche ρ_0.

1.4 La condizione di KMS.

Vogliamo ora ricavare dalla definizione di stato termico gran-canonico in un volume finito delle relazioni che non coinvolgono lo spazio di Fock e che sono valide anche dopo il limite termodinamico. Tali relazioni si possono usare per definire direttamente uno stato di equilibrio termico di un sistema con volume infinito.

Per dare una trattazione semplice e rigorosa, conviene considerare dapprima espressioni costruite con i campi che sono rappresentate nello spazio di Fock da operatori limitati. Esse si possono considerare elementi di una algebra astratta normata, l'algebra dei campi $\mathcal{F}$. I suoi elementi gauge-invarianti formano la sottoalgebra $\mathcal{A}$ delle osservabili (limitate). L'applicazione α_t^μ che agisce su di un operatore A nello spazio di Fock nel seguente modo

$$\alpha_t^\mu A = \exp(itK) A \exp(-itK), \qquad K = H - \mu N, \tag{1.92}$$

può anche essere considerata come un automorfismo dell'algebra astratta $\mathcal{F}$. Essa contiene una evoluzione temporale ed una trasformazione di gauge (che non agisce sulle osservabili). In particolare si può scrivere direttamente in termini di campi

$$\begin{aligned} \alpha_t^\mu \phi(\mathbf{x}, t') &= \exp(i\mu t)\phi(\mathbf{x}, t' + t), \\ \alpha_t^\mu \phi^*(\mathbf{x}, t') &= \exp(-i\mu t)\phi^*(\mathbf{x}, t' + t), \end{aligned} \tag{1.93}$$

dove l'evoluzione temporale si può dedurre direttamente dalle equazioni di campo.

Consideriamo le due funzioni

$$F_{A,B}(t) = \langle B(\alpha_t^\mu A)\rangle, \qquad G_{A,B}(t) = \langle(\alpha_t^\mu A)B\rangle. \tag{1.94}$$

Se il sistema ha volume finito possiamo calcolare la media gran canonica per mezzo della formula (1.71) ed otteniamo

$$\begin{aligned} F_{A,B}(t) &= \mathcal{Z}^{-1}\mathrm{Tr}\left(B \exp(itK) A \exp((-\beta - it)K)\right), \\ G_{A,B}(t) &= \mathcal{Z}^{-1}\mathrm{Tr}\left(B \exp((-\beta + it)K) A \exp(-itK)\right), \end{aligned} \tag{1.95}$$

dove si è posto

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\exp(-\beta K) \tag{1.96}$$

e si è utilizzata la possibilità di cambiare l'ordine dei fattori quando si calcola la traccia di un prodotto.

Siccome per i valori consentiti di μ l'operatore K è limitato inferiormente, la funzione $F_{A,B}(t)$ è definita per valori complessi di t nella striscia

$$0 \leq \operatorname{Im} t \leq \beta. \tag{1.97}$$

Essa è analitica all'interno della striscia e continua sui bordi. Inoltre si ha

$$F_{A,B}(t + i\beta) = G_{A,B}(t). \tag{1.98}$$

Questa eguaglianza, che deve valere per ogni scelta di A, B, è (assieme alle proprietà di analiticità sopra descritte) la condizione di KMS (Kubo, Martin e Schwinger), che caratterizza gli stati di KMS, anche nel caso di volume infinito. Si dimostra che per volume finito gli stati di KMS sono proprio quelli definiti dalle medie gran-canoniche. Se il volume è infinito, la condizione di KMS può essere usata per definire gli stati all'equilibrio termico indipendentemente dal limite termodinamico. Questa definizione può essere giustificata direttamente con argomenti fisici [5].

Nel caso particolare $B = 1$ si ha

$$F_{A,1}(t + i\beta) = F_{A,1}(t). \tag{1.99}$$

Questa funzione è pertanto periodica lungo l'asse immaginario, la si può continuare analiticamente in tutto il piano complesso ed, essendo limitata, è necessariamente una costante. In altre parole, $\langle \alpha_t^\mu A \rangle$ non dipende da t. Se A è una osservabile, α_t^μ descrive l'evoluzione temporale ed il suo valore di aspettazione è costante nel tempo come deve accadere in uno stato di equilibrio.

La condizione di KMS si può anche scrivere in un altro modo. Consideriamo una funzione $\tilde{f}(\epsilon)$ infinitamente differenziabile e con supporto compatto. La sua trasformata di Fourier

$$f(t) = \int \exp(-it\epsilon) \tilde{f}(\epsilon) \, d\epsilon \tag{1.100}$$

è una funzione analitica intera che decresce rapidamente lungo le rette parallele all'asse reale. Pertanto si può spostare il cammino di integrazione nel piano complesso e scrivere

$$\int F_{A,B}(t) f(t) \, dt = \int G_{A,B}(t) f(t + i\beta) \, dt. \tag{1.101}$$

Passando alle trasformate di Fourier (nel senso della teoria delle distribuzioni)

$$\tilde{F}_{A,B}(\epsilon) = \int \exp(-it\epsilon) F_{A,B}(t)\, dt \tag{1.102}$$

ed una simile definizione per $\tilde{G}_{A,B}(\epsilon)$, si ha

$$\int \tilde{F}_{A,B}(\epsilon) \tilde{f}(\epsilon)\, d\epsilon = \int \tilde{G}_{A,B}(\epsilon) \tilde{f}(\epsilon) \exp(\beta\epsilon)\, d\epsilon, \tag{1.103}$$

cioè, si ha la seguente eguaglianza tra distribuzioni

$$\tilde{G}_{A,B}(\epsilon) = \exp(-\beta\epsilon) \tilde{F}_{A,B}(\epsilon). \tag{1.104}$$

Senza alcuna pretesa di rigore, proviamo ad applicare questi risultati agli operatori non limitati che si ottengono integrando i campi. Si può sottintendere l'integrazione sulle variabili $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ e considerare le distribuzioni

$$\tilde{F}(\epsilon) = \int \exp(-i(\epsilon - \mu)t) \langle \phi^*(\mathbf{x}', t') \phi(\mathbf{x}, t' + t) \rangle\, dt,$$

$$\tilde{G}(\epsilon) = \int \exp(-i(\epsilon - \mu)t) \langle \phi(\mathbf{x}, t' + t) \phi^*(\mathbf{x}', t') \rangle\, dt. \tag{1.105}$$

Dalla condizione (1.104) e dalla relazione di commutazione (1.53) si ottiene la relazione

$$(\exp(-\beta\epsilon) \mp 1) \tilde{F}(\epsilon) = \tilde{G}(\epsilon) \mp \tilde{F}(\epsilon) =$$

$$= (2\pi)^{-2} \int \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \delta(\epsilon - \mu + \omega)\, d\mathbf{k}, \tag{1.106}$$

che permette di calcolare $\tilde{F}(\epsilon)$ a meno, nel caso bosonico, di un termine additivo della forma $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\delta(\epsilon)$. Invertendo la trasformata di Fourier, si ottiene l'espressione $\langle \phi^*(\mathbf{x}', t') \phi(\mathbf{x}, t) \rangle$ a meno, nel caso bosonico, di un termine del tipo $(2\pi)^{-1} C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \exp(-i\mu(t - t'))$. Usando le equazioni di campo soddisfatte da $\phi(\mathbf{x}, t)$ e da $\phi^*(\mathbf{x}', t')$ e ricordando che $\mu \leq 0$, si vede che il termine additivo può comparire solo se $\mu = 0$ ed è una costante che chiameremo ρ_0. Otteniamo così per altra via i risultati (1.87) e (1.89) della Sezione precedente.

Per quanto riguarda il valore di aspettazione

$$\langle \alpha_t^\mu \phi(\mathbf{x}, 0) \rangle = \exp(i\mu t) \langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle, \tag{1.107}$$

abbiamo visto che esso non dipende da t. Anche in questo caso possiamo usare le equazioni di campo per mostrare che questa quantità è nulla a meno che non sia $\mu = 0$ e che in tal caso essa deve essere costante;

$$\langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle = c, \qquad \mu = 0. \tag{1.108}$$

Utilizzeremo questa possibilità nella prossima Sezione.

Le considerazioni precedenti suggeriscono che gli stati di equilibrio termico di un sistema infinito possono essere determinati a partire dalle equazioni di campo, le relazioni di commutazione e la condizione di KMS. Naturalmente, si deve soddisfare anche la condizione di positività

$$\langle A^* A \rangle \geq 0. \tag{1.109}$$

Per esempio, imponendo

$$\langle (1 + \int \overline{f}(\mathbf{x}')\phi^*(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}')(1 + \int f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}) \rangle \geq 0, \tag{1.110}$$

con una opportuna scelta di $f(\mathbf{x})$ si ottiene

$$|c|^2 \leq \rho_0. \tag{1.111}$$

1.5 La rottura di simmetria nella condensazione di Bose.

Abbiamo visto nelle Sezioni precedenti che, in presenza della condensazione di Bose, se si fissa la temperatura ed il potenziale chimico $\mu = 0$, esistono infiniti stati di equilibrio, distinti dal parametro ρ_0, che soddisfano la condizione di KMS. Si vede facilmente che, per valori fissati di β e μ, gli stati di KMS formano un insieme convesso, cioè una sovrapposizione (incoerente) di stati di KMS con coefficienti positivi soddisfa ancora alla condizione di KMS. Si pone dunque il problema di vedere se gli stati del gas di Bose libero infinito che abbiamo trovato si possono decomporre nella sovrapposizione di stati di KMS più semplici, possibilmente *estremi*, cioè stati che non si possono ulteriormente decomporre in una sovrapposizione di altri stati di KMS.

Abbiamo anche visto che, nello stato ottenuto come limite delle medie gran-canoniche, quando si ha condensazione di Bose si manifestano delle correlazioni a lungo range, cioè i TEV $\langle \phi^*(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t') \rangle^T$ non tendono a zero quando $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \to \infty$ o $|t - t'| \to \infty$. Questa è una indicazione che lo stato non è estremo. Infatti, ora mostreremo che esso si decompone in stati di KMS più semplici che non hanno correlazioni a lungo range.

Indichiamo con $\langle . \rangle_{00}$ lo stato definito dal limite delle medie gran-canoniche con $\mu \to 0$ e $\rho_0 \to 0$ e β fissato. Consideriamo uno stato $\langle . \rangle_c$ tale che gli unici TEV non nulli siano

$$\langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle_c^T = c = \rho_0^{1/2} \exp(i\theta), \qquad \langle \phi^*(\mathbf{x}, t) \rangle_c^T = \bar{c}, \tag{1.112}$$

$$\langle \phi^*(\mathbf{x}', t') \phi(\mathbf{x}, t) \rangle_c^T = \langle \phi^*(\mathbf{x}', t') \phi(\mathbf{x}, t) \rangle_{00} =$$

$$= (2\pi)^{-3} \int \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega(t - t')) \left(\exp(\beta\omega) - 1\right)^{-1} d\mathbf{k}, \tag{1.113}$$

$$\langle \phi(\mathbf{x}, t) \phi^*(\mathbf{x}', t') \rangle_c^T = [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^*(\mathbf{x}', t')] + \langle \phi^*(\mathbf{x}', t') \phi(\mathbf{x}, t) \rangle_{00}. \tag{1.114}$$

Abbiamo già visto che queste espressioni soddisfano la condizione di KMS con $\mu = 0$ ed è facile convincersi che se la condizione è soddisfatta da tutti i TEV essa è soddisfatta anche da tutti i EV. Bisogna controllare che vale anche la condizione di positività (1.109). Il EV $\langle . \rangle_{00}$ è definito per mezzo del limite termodinamico e dunque è positivo per costruzione. Basta dunque osservare che il EV $\langle . \rangle_c$ si ottiene dal EV $\langle . \rangle_{00}$ per mezzo delle sostituzioni

$$\phi(\mathbf{x}, t) \to \phi(\mathbf{x}, t) + c, \qquad \phi^*(\mathbf{x}, t) \to \phi^*(\mathbf{x}, t) + \bar{c}. \tag{1.115}$$

da effettuare in ogni EV. Consideriamo il EV di un prodotto di n campi ed eseguiamo la sostituzione. Espandendo, si ottiene la somma di n^2 termini corrispondenti alle possibili suddivisioni degli n fattori in due sottinsiemi. I campi del primo sottinsieme vanno sostituiti con c o con $\overline{c}$ ed il prodotto di questi numeri va moltiplicato per il EV $\langle . \rangle_{00}$ del prodotto dei campi del secondo sottoinsieme. Quest'ultimo EV si può espandere in TEV ed è facile convincersi che in totale si ottiene una espansione in TEV dei tipi sopra elencati.

Si noti che lo stato $\langle . \rangle_c$ non è gauge-invariante e che il EV di un'osservabile non dipende dalla fase di c. Si può ripristinare l'invarianza di gauge mediando sulla fase, cioè considerando lo stato

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \langle . \rangle_c \, d\theta, \qquad c = \rho_0^{1/2} \exp(i\theta). \tag{1.116}$$

Questo EV coincide con quello calcolato a partire dalla media gran-canonica solo se si considerano meno di quattro operatori, ma non in generale. Per esempio si ha

$$\langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \rangle_c = \langle \rho(\mathbf{x}) \rangle_c \langle \rho(\mathbf{x}') \rangle_c +$$
$$+\rho_0 \langle \phi^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}') \rangle_{00} + \rho_0 \langle \phi(\mathbf{x})\phi^*(\mathbf{x}') \rangle_{00} + \langle \phi^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}') \rangle_{00} \langle \phi(\mathbf{x})\phi^*(\mathbf{x}') \rangle_{00}. \tag{1.117}$$

In questa formula la correlazione tende a zero a grandi distanze, contrariamente a quanto indicato dalla (1.90).

Si dimostra che il EV ottenuto dal limite termodinamico della media gran-canonica è una sovrapposizione di stati del tipo (1.116) data dall'integrale

$$(2\pi\rho_0)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \langle . \rangle_c \exp(\rho_0^{-1} |c|^2) \, d\theta \, d|c|^2. \tag{1.118}$$

Si dimostra anche che la formula (1.116) si ottiene dal limite termodinamico della media canonica. Questa discrepanza tra media canonica e gran-canonica nel limite termodinamico è un fatto eccezionale dovuto alla natura fisicamente singolare del sistema considerato.

Il gas di bosoni non interagenti, che si può trattare in maniera esplicita ed esatta, è un modello fisicamente non molto realistico, ma, tuttavia, permette di chiarire alcuni fenomeni che si presentano in sistemi fisicamente più interessanti. La presenza di più stati di equilibrio (KMS) per particolari valori dei parametri β, μ si osserva nelle transizioni di fase. Per esempio uno stato rappresenta la fase liquida ed un altro la fase gassosa. Si ricordi che in un volume finito non si hanno transizioni di fase "nette"; per ogni scelta dei parametri β, μ si ha un solo stato di equilibrio dato dalla media grancanonica che è una funzione analitica di β, μ. Le discontinuità e la mancanza di unicità nascono dal limite termodinamico.

Un altro fenomeno interessante è la rottura spontanea di simmetria, cioè l'esistenza di stati di equilibrio che non sono invarianti rispetto ad un gruppo di simmetria della teoria, che si presenta come un gruppo di automorfismi dell'algebra dei campi. Il caso che abbiamo incontrato è piuttosto particolare perchè la simmetria rotta è una simmetria di gauge, che non agisce sulle osservabili. Una situazione simile si presenta con l'elio superfluido. Una sostanza ferromagnetica, a temperatura abbastanza bassa, ha degli stati di equilibrio con una particolare direzione della magnetizzazione. In questo caso si ha rottura della simmetria per rotazioni. Anche in questo caso la simmetria può essere ristabilita mediando su tutte le direzioni, ma così facendo si introducono correlazioni a lungo range. Analogamente, un solido cristallino ha stati di equilibrio in cui gli atomi oscillano attorno ai punti di un reticolo fisso. In questo caso sono rotte le simmetrie di rotazione e di traslazione. La rottura di simmetria (nell'ambito delle teorie di campo relativistiche) gioca un ruolo essenziale nel modello standard delle interazioni elettrodeboli delle particelle elementari.