Introduzione alla
DI TEORIA DEI CAMPI.

M. Toller

1999

Capitolo 2

Campi quantizzati relativistici liberi.

2.1 Campo scalare.

Nel caso relativistico è conveniente descrivere gli stati ad una particella per mezzo delle funzioni d'onda nello spazio dei momenti. Consideriamo un sistema costituito da un unico tipo di particelle con spin arbitrario e massa positiva o nulla. Se indichiamo la funzione d'onda di una particella con $f_m(k)$ dove k è il quadri-impulso ed m è l'indice di spin, il prodotto scalare è definito da un integrale invariante per trasformazioni di Lorentz sull'orbita (mass shell)

$$k^0 = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}, \tag{2.1}$$

cioè dalla formula

$$\begin{aligned}(f, g) &= \sum_m \int \overline{f_m(k)} g_m(k) \theta(k^0) \delta(k \cdot k - m^2)\, d^4k = \\ &= \sum_m \int \overline{f_m(k)} g_m(k) (2k^0)^{-1}\, d^3\mathbf{k},\end{aligned} \tag{2.2}$$

dove θ è la funzione a scalino.

Introduciamo le distribuzioni a valori operatoriali $\tilde{\phi}_m^{(\pm)}(k)$ definite sull'orbita (2.1) dalle relazioni

$$\sum_m \int \tilde{\phi}_m^{(+)}(k) f_m(k) (2k^0)^{-1}\, d^3\mathbf{k} = a^*(f), \tag{2.3}$$

$$\sum_m \int \tilde{\phi}_m^{(-)}(k)\overline{f_m(k)}(2k^0)^{-1}\, d^3\mathbf{k} = a(f). \tag{2.4}$$

Da queste formule segue

$$\tilde{\phi}_m^{(\pm)}(k) = (\tilde{\phi}_m^{(\mp)}(k))^*. \tag{2.5}$$

Sostituendo le formule (2.2), (2.3) e (2.4) nelle relazioni di (anti)commutazione (1.9), si ottiene

$$\left[\sum_m \int \tilde{\phi}_m^{(-)}(k)\overline{f_m(k)}(2k^0)^{-1}\, d^3\mathbf{k},\ \sum_n \int \tilde{\phi}_n^{(+)}(p) g_n(p)(2p^0)^{-1}\, d^3\mathbf{p}\right]_\mp =$$

$$= \sum_m \int \overline{f_m(k)} g_m(k)(2k^0)^{-1}\, d^3\mathbf{k}, \tag{2.6}$$

cioè in termini di distribuzioni

$$[\tilde{\phi}_m^{(-)}(k), \tilde{\phi}_n^{(+)}(p)]_\mp = \delta_{mn} 2k^0 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}). \tag{2.7}$$

In modo analogo si ottiene

$$[\tilde{\phi}_m^{(-)}(k), \tilde{\phi}_n^{(-)}(p)]_\mp = 0, \qquad [\tilde{\phi}_m^{(+)}(k), \tilde{\phi}_n^{(+)}(p)]_\mp = 0. \tag{2.8}$$

Introducendo un sistema ortonormale e completo $\{f_{in}(k)\}$ di stati ad una particella ed usando la relazione di completezza

$$\sum_i f_{im}(k)\overline{f_{in}(p)} = 2k^0 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p})\delta_{mn}, \tag{2.9}$$

dalla (1.16), (1.20) otteniamo per il numero di particelle l'espressione

$$N = \sum_m \int \tilde{\phi}_m^{(+)}(k)\tilde{\phi}_m^{(-)}(k)(2k^0)^{-1}\, d^3\mathbf{k}. \tag{2.10}$$

Per le componenti del quadri-impulso, tenendo conto della

$$[P^{(1)\mu} f](k) = k^\mu f(k), \tag{2.11}$$

dalla (1.16) otteniamo l'espressione

$$P^\mu = \sum_m \int k^\mu \tilde{\phi}_m^{(+)}(k)\tilde{\phi}_m^{(-)}(k)(2k^0)^{-1}\, d^3\mathbf{k}. \tag{2.12}$$

Per evitare un formalismo troppo pesante, nel seguito di questo capitolo considereremo solamente particelle di spin zero e massa qualunque. I problemi (non banali) riguardanti lo spin, saranno affrontati nel Capitolo 2.1. In assenza di spin la rappresentazione unitaria del gruppo di Poincaré che agisce sugli stati ad una particella prende la semplice forma

$$[U^{(1)}_{(a,L)}f](k) = \exp(ik \cdot a) f(L^{-1}k). \tag{2.13}$$

Se si utilizza questa formula e si sostituiscono le equazioni (2.3) e (2.4) nella (1.11), si ottengono le proprietà di trasformazione

$$U_{(a,A)}\tilde{\phi}^{(\pm)}(k)U^{-1}_{(a,A)} = \exp(\pm iLk \cdot a)\tilde{\phi}^{(\pm)}(Lk). \tag{2.14}$$

I campi nello spazio-tempo sono definiti dalle trasformate di Fourier

$$\phi^{(\pm)}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp(\pm ik \cdot x)\tilde{\phi}^{(\pm)}(k)\,(2k^0)^{-1}\,d^3\mathbf{k}. \tag{2.15}$$

Si noti che i campi $\phi^{(\pm)}(x)$ sono le trasformate di Fourier quadridimensionali delle distribuzioni $\tilde{\phi}^{(\pm)}(\pm k)\theta(\pm k^0)\delta(k \cdot k - m^2)$, che hanno supporto, rispettivamente, sul mass shell e sulla corrispondente orbita ad energia negativa. Naturalmente, questa trasformata va intesa nel senso della teoria delle distribuzioni, cioè è definita dalla equazione

$$\int \phi^{(\pm)}(x) f(x)\,d^4x = \int \tilde{\phi}^{(\pm)}(k)\tilde{f}(\pm k)(2k^0)^{-1}\,d^3\mathbf{k}, \tag{2.16}$$

dove

$$\tilde{f}(k) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp(ik \cdot x) f(x) d^4x. \tag{2.17}$$

La proprietà di trasformazione di questi campi è

$$U_{(a,A)}\phi^{(\pm)}(x)U^{-1}_{(a,A)} = \phi^{(\pm)}(Lx + a). \tag{2.18}$$

Si tratta di una legge di trasformazione *locale*, cioè il campo in un punto determina il campo trasformato nel punto trasformato. Si vede immediatamente dalla definizione che i campi $\phi^{(\pm)}(x)$ soddisfano alla equazione di Klein-Gordon

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^{(\pm)}(x) + m^2 \phi^{(\pm)}(x) = 0. \tag{2.19}$$

Essi sono rispettivamente soluzioni a frequenza positiva ed a frequenza negativa di questa equazione. Contrariamente a quanto avviene per le funzioni d'onda, entrambi i tipi di soluzione hanno un significato fisico, rispettivamente come operatori di creazione e di distruzione. Si ha inoltre

$$\phi^{(+)}(x) = (\phi^{(-)}(x))^*. \tag{2.20}$$

Dalle equazioni (2.7) e (2.8) si ottiene con qualche calcolo

$$[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)]_\mp = -iD^{(-)}(m, x-y) =$$

$$= (2\pi)^{-3} \int \exp(-ik\cdot(x-y))\theta(k^0)\delta(k\cdot k - m^2)\, d^4k, \tag{2.21}$$

$$[\phi^{(+)}(x), \phi^{(+)}(y)]_\mp = 0, \qquad [\phi^{(-)}(x), \phi^{(-)}(y)]_\mp = 0. \tag{2.22}$$

Espressioni esplicite per la funzione $D^{(-)}$ definita dalla (2.21) si trovano in ogni testo di teoria dei campi [8]. È facile vedere che essa non si annulla quando il quadrivettore $x - y$ è di tipo spaziale.

Usando la (2.15), il numero di particelle si può scrivere nella forma

$$N = i \int \left(\phi^{(+)}(x)\partial_0\phi^{(-)}(x) - \partial_0\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(x)\right) d^3\mathbf{x}. \tag{2.23}$$

Analogamente per le componenti della quantità di moto e per l'energia si ha

$$-P^k = P_k = \int \left(\partial_k\phi^{(+)}(x)\partial_0\phi^{(-)}(x) + \partial_0\phi^{(+)}(x)\partial_k\phi^{(-)}(x)\right) d^3\mathbf{x}, \tag{2.24}$$

$$P^0 = P_0 = \int \Big(\partial_0\phi^{(+)}(x)\partial_0\phi^{(-)}(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} \partial_k\phi^{(+)}(x)\partial_k\phi^{(-)}(x) + m^2\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(x)\Big)\, d^3\mathbf{x}. \tag{2.25}$$

Questi integrali vanno calcolati per un valore costante del tempo x^0 ed è facile verificare che essi non dipendono dal tempo.

2.2 Campi e densità locali.

Consideriamo due eventi separati spazialmente, tali cioè che, se x ed y sono le loro coordinate spazio-temporali, si abbia

$$(x-y)\cdot(x-y)<0. \tag{2.26}$$

La relatività ristretta richiede che essi non possano influenzarsi a vicenda e dunque due osservabili misurate in x ed in y sono compatibili e sono descritte da operatori che commutano. Diremo che una teoria di campo è *locale* se, dati due qualunque campi $\phi_A(x)$ e $\phi_B(x)$ essi soddisfano la condizione di *(anti)commutatività locale*, cioè si ha

$$\left[\int \phi_A(x)f(x)\,d^4x, \int \phi_B(y)g(y)\,d^4y\right]_{\mp}=0 \tag{2.27}$$

quando i supporti di f e g sono spazialmente separati, cioè quando la relazione $f(x)g(y)\neq 0$ implica la (2.26). Le osservabili costruite con campi locali hanno la proprietà richiesta dai principi generali sopra esposti, poichè vi compaiono solamente prodotti di un numero pari di campi fermionici. Si noti che un singolo campo fermionico non è mai direttamente osservabile.

Come abbiamo visto, in una teoria relativistica i campi $\phi^{(\pm)}$ non soddisfano alla condizione di località, ma si riesce a costruire un campo locale sommando la distribuzione $\phi^{(+)}$ costruita con gli operatori di creazione alla distribuzione $\phi^{(-)}$ costruita con gli operatori di distruzione. Infatti, se si pone

$$\phi(x)=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x), \tag{2.28}$$

si ha

$$i[\phi(x),\phi(y)]_{\mp}=D^{(-)}(m,x-y)\mp D^{(-)}(m,y-x). \tag{2.29}$$

Siccome la funzione $D^{(-)}$ è pari per riflessione spaziale, se si sceglie il segno $-$ questa espressione si annulla per $x^0=y^0$. Tenuto conto dell'invarianza per trasformazioni di Lorentz, si vede che

$$i[\phi(x),\phi(y)]=D^{(-)}(m,x-y)-D^{(-)}(m,y-x)=D(m,x-y) \tag{2.30}$$

si annulla per $x-y$ di tipo spaziale, cioè $\phi(x)$ soddisfa alla condizione di commutatività locale.

La cancellazione sopra descritta si ha solo se si usano commutatori, cioè se ϕ è un campo bosonico. Vedremo in seguito che la stessa conclusione vale per tutti i campi di spin intero, mentre per i campi di spin semintero si può soddisfare la commutatività locale solo con le relazioni di anticommutazione caratteristiche dei campi fermionici. Questa è la relazione tra spin e statistica nel caso di campi liberi. Un analogo teorema si dimostra a partire dalla commutatività locale e da altre ipotesi molto generali [6, 7] anche nel caso di campi interagenti. La relazione tra spin e statistica è confermata sperimentalmente.

Dalla (2.20) si vede che $\phi(x)$ è un campo hermitiano (o reale). Tutte queste formule vanno interpretate nel senso della teoria delle distribuzioni; per esempio dire che $\phi(x)$ è hermitiano significa che se $f(x)$ è reale l'operatore

$$\int \phi(x) f(x) d^4x \tag{2.31}$$

è hermitiano. Si può anche dimostrare che esso ha una estensione autoaggiunta [6] che può rappresentare una osservabile. Come abbiamo già osservato, se f ha supporto in una regione dello spazio-tempo, questo operatore rappresenta una osservabile che si può misurare con operazioni svolte in questa regione. Dato che la teoria soddisfa alla commutatività locale, due osservabili appartenenti a regioni spazialmente disgiunte sono compatibili e le rispettive operazioni di misura non si influenzano reciprocamente.

Nel Capitolo precedente abbiamo visto che nel caso non relativistico, se si misurano osservabili a tempi eguali in regioni spaziali distinte sullo stato vuoto Φ_0, i risultati non sono correlati tra loro. In una teoria relativistica la situazione è diversa e si hanno *fluttuazioni del vuoto*. Infatti, tralasciando per semplicità le funzioni f e gli integrali, si ha

$$(\Phi_0, \phi(x)\phi(y)\Phi_0) = (\Phi_0, [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)]\Phi_0) = -iD^{(-)}(m, x-y) \tag{2.32}$$

e questa espressione non si annulla per $x - y$ di tipo spaziale, mentre

$$(\Phi_0, \phi(x)\Phi_0) = 0. \tag{2.33}$$

Si è usata ripetutamente la proprietà

$$\phi^{(-)}(x)\Phi_0 = 0 \tag{2.34}$$

caratteristica degli operatori di distruzione.

Se consideriamo una funzione d'onda che descrive uno stato con diversi tipi di particelle, le sue proprietà rispetto allo scambio delle coordinate di particelle di tipo diverso non hanno un significato fisico diretto. Ne segue che c'è una certa arbitrarietà nella scelta delle relazioni di commutazione o di anticommutazione dei relativi operatori di creazione e di distruzione. Useremo funzioni d'onda simmetriche rispetto allo scambio di due bosoni o di un bosone con un fermione ed antisimmetriche rispetto allo scambio di due fermioni. Ne segue che le relazioni di anticommutazione vanno usate solo per le coppie di operatori fermionici. Una discussione del problema generale nel caso di campi interagenti si trova in [6].

È possibile costruire campi che soddisfano alla condizione di commutatività locale anche sommando operatori di distruzione di una particella che indichiamo con A ad operatori di creazione di una particella diversa con la stessa massa e lo stesso spin che indichiamo con $\overline{A}$. Infatti, se poniamo (nel caso di spin zero)

$$\begin{aligned} \phi_A(x) &= \phi_A^{(-)}(x) + \phi_{\overline{A}}^{(+)}(x), \\ \phi_{\overline{A}}(x) &= \phi_{\overline{A}}^{(-)}(x) + \phi_A^{(+)}(x) = (\phi_A(x))^*, \end{aligned} \tag{2.35}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} i[\phi_A(x), \phi_{\overline{A}}(y)] &= D^{(-)}(m, x-y) - D^{(-)}(m, y-x) = D(m, x-y), \\ [\phi_A(x), \phi_B(y)] &= 0, \qquad B \neq \overline{A}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Se due particelle A ed $\overline{A}$ contribuiscono nel modo sopra descritto alla costruzione di un campo libero locale, si dice che $\overline{A}$ è *l'antiparticella* di A e viceversa. All'inizio di questa Sezione si è considerata una particella che è l'antiparticella di se stessa ed il corrispondente campo libero è hermitiano. Si noti che la corrispondenza tra particelle ed antiparticelle non è una convenzione, ma una scelta fisicamente significativa. Infatti, se B è una particella diversa da A e da $\overline{A}$, si può considerare il campo

$$\phi_{AB}(x) = \phi_A^{(-)}(x) + \phi_B^{(+)}(x). \tag{2.37}$$

Esso commuta a distanze di tipo spaziale con se stesso e con il suo coniugato hermitiano, ma non col campo $\phi_A(x)$ definito sopra. Ne segue che una teoria locale non può essere basata contemporaneamente sui campi $\phi_{AB}(x)$ e $\phi_A(x)$. Teorie che descrivono le stesse particelle con le stesse rappresentazioni del gruppo di simmetria, ma con diverse associazioni di particelle ed antiparticelle hanno una diversa struttura locale, nel senso che le osservabili misurabili in una regione spazio-temporale sono diverse.

La funzione integranda che compare nell'espressione (2.23) per il numero totale di particelle non può essere interpretata fisicamente come una densità il cui integrale su di una regione limitata dà il numero di particelle in essa contenuto. Infatti essa non è un campo locale, come si può verificare calcolando il commutatore a tempi eguali. Se si vuole ottenere una densità locale è necessario considerare la differenza $N_A - N_{\overline{A}}$ tra il numero di particelle ed il numero di antiparticelle. Infatti dalla (2.15) segue

$$\int \left(\phi_A^{(\pm)}(x)\partial_0\phi_B^{(\pm)}(x) - \partial_0\phi_A^{(\pm)}(x)\phi_B^{(\pm)}(x)\right)\, d^3\mathbf{x} = 0 \tag{2.38}$$

e si ha

$$N_A - N_{\overline{A}} = i\int :(\phi_A^*(x)\partial_0\phi_A(x) - \partial_0\phi_A^*(x)\phi_A(x)):\, d^3\mathbf{x}. \tag{2.39}$$

dove $: \ldots :$ indica il prodotto normale, in cui tutti gli operatori di distruzione sono spostati a destra degli operatori di creazione, per esempio

$$\begin{aligned} :\phi_A^*(x)\phi_A(x) :&= \lim_{y\to x}(\phi_A^*(x)\phi_A(y) - [\phi_{\overline{A}}^{(-)}(x), \phi_{\overline{A}}^{(+)}(y)]) = \\ &= \lim_{y\to x}(\phi_A^*(x)\phi_A(y) - (\Phi_0, \phi_A^*(x)\phi_A(y)\Phi_0)). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Si vede che i prodotti normali di campi locali soddisfano alla condizione di commutatività locale e che il valore di aspettazione nel vuoto di un prodotto normale è sempre nullo.

Se le particelle A ed $\overline{A}$ hanno rispettivamente carica q e $-q$, la quantità

$$Q = q(N_A - N_{\overline{A}}) = \int J^0(x)\, d^3\mathbf{x} \tag{2.41}$$

è la carica totale, data dall'integrale della densità di carica $J^0(x)$, la componente temporale della quadricorrente locale

$$J_\mu(x) = iq :(\phi_A^*(x)\partial_\mu\phi_A(x) - \partial_\mu\phi_A^*(x)\phi_A(x)):, \tag{2.42}$$

che soddisfa all'equazione di continuità

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0. \tag{2.43}$$

La quadricorrente si annulla se $A = \overline{A}$, cioè se il campo è hermitiano. Si vede dunque che per definire una corrente locale è necessario introdurre particelle ed antiparticelle con carica opposta.

La quadricorrente è necessaria per descrivere una interazione locale tra particelle cariche e campo elettromagnetico. I termini che stanno negli integrali (2.38) sono necessari per la località della corrente. Essi non contribuiscono alla carica totale, ma fanno sì che un campo elettromagnetico possa creare o distruggere coppie di particelle ed antiparticelle. Si capisce dunque come i fenomeni di produzione che si osservano sperimentalmente siano previsti dalle teorie relativistiche quantistiche locali.

Una simile trattazione si può dare per il momento e l'energia. Anche in questo caso le espressioni sotto il segno di integrale nelle equazioni (2.24) e (2.25) non sono campi locali, ma si può sommare il contributo delle particelle e delle antiparticelle ed aggiungere delle espressioni bilineari, analoghe alle (2.38), i cui integrali sono nulli. Si ottiene in tal modo

$$P_\mu = \int T_{0\mu}(x)\, d^3\mathbf{x}, \tag{2.44}$$

dove il contributo delle particelle e delle antiparticelle al tensore energia-impulso è

$$\begin{aligned} T_{\nu\mu}(x) =&: \partial_\nu \phi_A^*(x) \partial_\mu \phi_A(x) : + : \partial_\mu \phi_A^*(x) \partial_\nu \phi_A(x) : \\ &- g_{\nu\mu} : \partial_\eta \phi_A^*(x) \partial^\eta \phi_A(x) : + m^2 g_{\nu\mu} : \phi_A^*(x) \phi_A(x) : . \end{aligned} \tag{2.45}$$

Se $A = \overline{A}$, questa espressione va divisa per 2. Come si vede, si tratta di espressioni locali che contengono anche termini che producono o distruggono coppie di particelle. Dalla equazione di Klein-Gordon segue l'equazione di continuità

$$\partial_\nu T^\nu{}_\mu(x) = 0. \tag{2.46}$$

Per controllare che Q e P_μ sono i generatori delle appropriate trasformazioni di simmetria, si possono utilizzare le relazioni di commutazione a tempi eguali che si ottengono dalle formule

$$D(m, \mathbf{x}, 0) = 0, \qquad \partial_0 D(m, \mathbf{x}, 0) = \delta^3(\mathbf{x}), \qquad \partial_0 \partial_0 D(m, \mathbf{x}, 0) = 0. \tag{2.47}$$

In tal modo si ha:

$$[Q, \phi_A(x)] = -q\phi_A(x), \qquad [P_\mu, \phi_A(x)] = -i\partial_\mu \phi_A(x). \tag{2.48}$$

I risultati di questa Sezione si possono ottenere in maniera più sistematica per mezzo della quantizzazione canonica a partire dal formalismo lagrangiano per il campo classico. La trattazione che abbiamo dato presenta il vantaggio di chiarire il ruolo della località nel determinare le caratteristiche più importanti della teoria.

2.3 Prodotti normali di Wick.

Per introdurre una interazione tra i campi che mantenga le proprietà di località e di invarianza per il gruppo di Lorentz, è (quanto meno) necessario definire una hamiltoniana di interazione che si possa esprimere come un integrale di una densità hamiltoniana locale, data da un prodotto di campi tutti con lo stesso argomento x. Dato che i campi sono distribuzioni, il significato di questi prodotti deve essere analizzato in dettaglio. Usando le relazioni di (anti)commutazione, ci si può sempre ridurre a prodotti normali. Essi hanno un significato come distribuzioni se si riesce a definire l'operatore

$$A = \int f(x)(\phi^{(+)}(x))^m (\phi^{(-)}(x))^n \, d^4x, \tag{2.49}$$

dove $f(x)$ è una funzione di prova nello spazio-tempo. Mostreremo che questo è sempre possibile e che dunque, dati dei campi liberi locali, si possono costruire i *prodotti normali di Wick* del tipo : $\phi(x))^n$: che sono dei campi locali. L'argomento si generalizza facilmente al caso in cui nel prodotto appaiono derivate di ordine arbitrario dei campi. Dal carattere singolare dei commutatori, si deduce che prodotti di campi nello stesso punto con ordinamento diverso da quello normale non possono essere definiti. Ricordiamo che per ottenere un operatore da un campo libero basta considerare un integrale sulle coordinate spaziali. I prodotti di Wick hanno in generale una natura più singolare che richiede anche una integrazione sulla variabile tempo. Vedremo che questo fatto introduce delle difficoltà nel metodo perturbativo.

Non ci sono difficoltà a definire l'operatore

$$\begin{aligned} A = \int F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)\phi^{(+)}(x_1) \cdots \phi^{(+)}(x_m) \cdot \\ \cdot \phi^{(-)}(y_1) \cdots \phi^{(-)}(y_n) \, d^4x_1 \cdots d^4x_m \, d^4y_1 \cdots d^4y_n, \end{aligned} \tag{2.50}$$

se F è una funzione abbastanza regolare e decrescente all'infinito. Si può anche scrivere

$$\begin{aligned} A = \int \tilde{F}(k_1, \ldots, k_m, -p_1, \ldots, -p_n)\tilde{\phi}^{(+)}(k_1) \cdots \tilde{\phi}^{(+)}(k_m)\tilde{\phi}^{(-)}(p_1) \cdots \tilde{\phi}^{(-)}(p_n) \cdot \\ \cdot (2k_1^0)^{-1} d^3\mathbf{k}_1 \cdots (2k_m^0)^{-1} d^3\mathbf{k}_m \, (2p_1^0)^{-1} d^3\mathbf{p}_1 \cdots (2p_n^0)^{-1} d^3\mathbf{p}_n, \end{aligned} \tag{2.51}$$

dove

$$\tilde{F}(k_1, \ldots, k_m, p_1, \ldots, p_n) = (2\pi)^{-3(m+n)/2}.$$

$$\cdot \int \exp(ik_1 \cdot x_1 + \ldots + ik_m \cdot x_m + ip_1 \cdot y_1 + \ldots + ip_n \cdot y_n) \cdot$$
$$\cdot F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)\, d^4x_1 \cdots d^4x_m\, d^4y_1 \cdots d^4y_n. \tag{2.52}$$

L'operatore A agisce su di un vettore dello spazio di Fock nel seguente modo

$$[A\Phi^{(r)}](k_1, \ldots, k_{r-n+m}) = C_r \mathbf{S}_\pm \int \tilde{F}(k_1, \ldots, k_m, -p_1, \ldots, -p_n) \cdot$$
$$\cdot \Phi^{(r)}(p_n, \ldots, p_1, k_{m+1}, \ldots, k_{r-n+m})\, (2p_1^0)^{-1} d^3\mathbf{p}_1 \cdots (2p_n^0)^{-1} d^3\mathbf{p}_n,$$
$$r \geq n, \tag{2.53}$$

dove il simbolo $\mathbf{S}_\pm$ indica la simmetrizzazione o l'antisimmetrizzazione della funzione d'onda ed il fattore numerico C_r è dato da

$$C_r = r^{1/2} \cdots (r - m + 1)^{1/2} (r - m + 1)^{1/2} \cdots (r - m + n)^{1/2}. \tag{2.54}$$

Per dimostrare la (2.53) è sufficiente considerare il caso particolare in cui

$$F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = f_1(x_1) \cdots f_m(x_m) \overline{g_1(y_1)} \cdots \overline{g_n(y_n)}, \tag{2.55}$$

$$\tilde{F}(k_1, \ldots, k_m, -p_1, \ldots, -p_n) = \tilde{f}_1(k_1) \cdots \tilde{f}_m(k_m) \overline{\tilde{g}_1(p_1)} \cdots \overline{\tilde{g}_n(p_n)}. \tag{2.56}$$

Utilizzando le formule (2.3) ed (2.4) si ottiene

$$A = a^*(\tilde{f}_1) \cdots a^*(\tilde{f}_m) a(\tilde{g}_1) \cdots a(\tilde{g}_n) \tag{2.57}$$

e la formula (2.53) segue dalle definizioni (1.5) e (1.6).

Nella formula (2.53) compare un operatore integrale con nucleo $\tilde{F}$ che agisce su alcune delle variabili della funzione d'onda $\Phi^{(r)}$. Se $\tilde{F}$ è una funzione al quadrato sommabile (rispetto alle misure invarianti sui mass-shells) si vede che A è un operatore limitato quando agisce sui sottospazi $\mathcal{H}^{(r)}$ e per linearità esso si può considerare come un operatore definito su di un sottospazio denso dello spazio di Fock $\mathcal{H}$ (non necessariamente limitato a causa dei coefficienti C_r). Nel seguito studiamo alcuni casi limite in cui il nucleo $\tilde{F}$ presenta degli aspetti singolari.

Vogliamo mostrare che l'integrale (2.49) definisce un operatore (non necessariamente limitato) sul sottospazio denso $\mathcal{D}^{(r)} \subset \mathcal{H}^{(r)}$ formato dalle funzioni d'onda $\Phi^{(r)}(p_1, \ldots, p_r)$ continue che *decrescono rapidamente* in tutti i loro argomenti. Questo significa che esse rimangono limitate quando si moltiplicano per una arbitraria funzione polinomiale dei loro argomenti. Mostreremo anche che $A\Phi^{(r)} \in \mathcal{D}^{(r-n+m)}$. Per ottenere questi risultati non è neppure necessario considerare un integrale quadridimensionale del tipo (2.49), ma è sufficiente integrare solo sul tempo, cioè considerare l'espressione

$$A = \int f(x^0)(\phi^{(+)}(x))^m(\phi^{(-)}(x))^n \, dx^0, \tag{2.58}$$

per valori fissati delle coordinate spaziali $\mathbf{x}$ che nel seguito supporremo nulli. Per studiare questa espressione basta porre nella (2.53)

$$F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = f(x_1^0)\delta^3(\mathbf{x}_1)\cdot$$
$$\cdot\delta^4(x_2 - x_1)\cdots\delta^4(x_m - x_1)\delta^4(y_1 - x_1)\cdots\delta^4(x_n - x_1), \tag{2.59}$$

ovvero

$$\tilde{F}(k_1, \ldots, k_m, -p_1, \ldots, -p_n) = \tilde{f}(k^0 - p^0),$$
$$k = k_1 + \ldots + k_m, \qquad p = p_1 + \ldots + p_n. \tag{2.60}$$

dove la funzione $\tilde{f}$ decresce rapidamente.

L'integrale che compare nella (2.53) si può scrivere nella forma

$$\int \tilde{f}(k^0 - p^0)M(p^0, k_{m+1}, \ldots, k_{r-n+m})\, dp^0, \tag{2.61}$$

dove

$$M(p^0, k_{m+1}, \ldots, k_{r-n+m}) = \int \Phi^{(r)}(p_n, \ldots, p_1, k_{m+1}, \ldots, k_{r-n+m})\cdot$$
$$\cdot\delta(p_1^0 + \ldots + p_n^0 - p^0)\,(2p_1^0)^{-1}d^3\mathbf{p}_1\cdots(2p_n^0)^{-1}d^3\mathbf{p}_n. \tag{2.62}$$

La funzione M decresce rapidamente in tutte le sue variabili e così pure la funzione definita dall'integrale di convoluzione (2.61). La decrescita rapida della funzione (2.53) nelle variabili k_i segue dalle diseguaglianze

$$|\mathbf{k}_i| \le k_i^0 \le k^0. \tag{2.63}$$

Ora vogliamo mostrare che un integrale tri-dimensionale del tipo

$$\int f(\mathbf{x})(\phi^{(+)}(x))^m(\phi^{(-)}(x))^n \, d^3\mathbf{x}, \qquad x^0 = 0. \tag{2.64}$$

non definisce, in generale, un operatore. Per studiare questo integrale basta porre nella (2.53)

$$\tilde{F}(k_1, \ldots, k_m, -p_1, \ldots, -p_n) = \tilde{f}(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \tag{2.65}$$

Si vede che la funzione d'onda (2.53) dipende dalle variabili $k_1, \ldots, k_m$ solo attraverso la loro combinazione $\mathbf{k}$ e si può scrivere

$$\|\Phi^{(r)}\|^2 = \int |[A\Phi^{(r)}](\mathbf{k}, k_{m+1}, \ldots, k_{r-n+m})|^2 N(\mathbf{k})\, d^3\mathbf{k} \cdot$$

$$\cdot (2k^0_{m+1})^{-1} d^3\mathbf{k}_{m+1} \cdots (2k^0_{r-m+n})^{-1} d^3\mathbf{k}_{r-n+n}, \tag{2.66}$$

dove

$$N(\mathbf{k}) = \int \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \ldots - \mathbf{k}_m)(2k^0_1)^{-1} d^3\mathbf{k}_1 \cdots (2k^0_m)^{-1} d^3\mathbf{k}_m. \tag{2.67}$$

Quest'ultimo integrale può convergere solo se $(\nu - 1)(m - 1) < 1$, dove ν è il numero di dimensioni spaziali. Questa condizione è soddisfatta se $m \leq 1$ oppure se $\nu = 1$. Negli altri casi l'integrale (2.64) non definisce un operatore.