Introduzione alla
DI TEORIA DEI CAMPI.

M. Toller

1999

Capitolo 3

Introduzione al metodo perturbativo.

3.1 Il formalismo di interazione.

R. Haag ha mostrato che il formalismo di interazione non si può applicare ad una teoria di campo relativistica locale [5, 7]. Tuttavia, il metodo perturbativo basato sul formalismo di interazione è utile nel caso non relativistico. Inoltre, un metodo di affrontare il problema relativistico consiste nel partire da una teoria *regolarizzata*, che non soddisfa la località nè la covarianza relativistica, ma si può trattare con il formalismo di interazione, ed infine definire un limite in cui la località e la covarianza sono ristabilite. Questo metodo non è forse il più adatto ad una trattazione rigorosa, ma, avendo un significato fisico abbastanza diretto, serve di guida e motivazione per altri approcci.

Riassumiamo le relazioni tra i formalismi di Schrödinger, Heisenberg e di interazione per l'evoluzione temporale in meccanica quantistica. La hamiltoniana di Schrödinger si spezza in due parti

$$H(t) = H_0 + H'(t), \tag{3.1}$$

delle quali solo la seconda può dipendere dal tempo. L'evoluzione temporale è descritta dagli operatori unitari $U(t, t_0)$ che soddisfano le equazioni

$$\frac{d}{dt}U(t, t_0) = -iH(t)U(t, t_0), \qquad U(t_0, t_0) = 1. \tag{3.2}$$

Se H non dipende dal tempo, si ha

$$U(t,t_0) = \exp(-i(t-t_0)H). \tag{3.3}$$

Se si indica con Φ un vettore che rappresenta uno stato e con A un operatore che rappresenta una osservabile, la relazione tra il formalismo di Schrödinger e quello di Heisenberg è

$$\Phi_S(t) = U(t,0)\Phi_H, \qquad A_H(t) = U(t,0)^* A_S U(t,0). \tag{3.4}$$

Il formalismo di interazione è definito da

$$A_I(t) = \exp(itH_0)A_S \exp(-itH_0),$$

$$\Phi_I(t) = \exp(itH_0)\Phi_S(t) = \exp(itH_0)U(t,0)\Phi_H = V(t,0)\Phi_H. \tag{3.5}$$

Seguono le seguenti formule utili

$$\Phi_I(t) = V(t,t_0)\Phi_I(t_0), \qquad V(t,t_0) = \exp(itH_0)U(t,t_0)\exp(-it_0H_0), \tag{3.6}$$

$$\frac{d}{dt}\Phi_I(t) = -iH_I(t)\Phi_I(t), \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt}V(t,t_0) = -iH_I(t)V(t,t_0), \qquad V(t_0,t_0) = 1, \tag{3.8}$$

$$H_I(t) = \exp(itH_0)H'(t)\exp(-itH_0), \tag{3.9}$$

$$V(t_2,t_1)V(t_1,t_0) = V(t_2,t_0), \qquad V(t_0,t) = V(t,t_0)^{-1} = V(t,t_0)^*, \tag{3.10}$$

$$A_H(t) = V(t,0)^* A_I(t) V(t,0). \tag{3.11}$$

Dalla equazione differenziale (3.8) con la condizione iniziale indicata segue l'equazione integrale

$$V(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} H_I(t')V(t',t_0)\,dt', \tag{3.12}$$

la cui soluzione perturbativa si può rappresentare formalmente con l'espressione

$$V(t,t_0) = \mathbf{T}\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} H_I(t')\,dt'\right). \tag{3.13}$$

Il simbolo $\mathbf{T}$ indica l'ordinamento degli operatori secondo valori decrescenti del loro argomento temporale (*prodotto ordinato nel tempo o* $\mathbf{T}$*-prodotto*). Se nel prodotto appaiono campi fermionici, si deve aggiungere un segno negativo ogni volta che per ottenere l'ordinamento temporale si permutano due operatori fermionici.

Usando la (3.11) si vede facilmente che

$$A_H^{(1)}(t_1)A_H^{(2)}(t_2)\cdots A_H^{(n)}(t_n) =$$

$$= V(0,t_1)A_I^{(1)}(t_1)V(t_1,t_2)A_I^{(2)}(t_2)\cdots V(t_{n-1},t_n)A_I^{(n)}(t_n)V(t_n,0). \tag{3.14}$$

e se $t'' \geq t_i \geq t'$, segue la formula perturbativa

$$\mathbf{T}\left(A_H^{(1)}(t_1)A_H^{(2)}(t_2)\cdots A_H^{(n)}(t_n)\right) =$$

$$= V(0,t'')\mathbf{T}\left(A_I^{(1)}(t_1)A_I^{(2)}(t_2)\cdots A_I^{(n)}(t_n)\exp\left(-i\int_{t'}^{t''} H_I(t)\,dt\right)\right)V(t',0). \tag{3.15}$$

Si noti che il simbolo di ordinamento temporale $\mathbf{T}$ spezza l'esponenziale che compare a secondo membro in vari fattori che vengono inseriti nella posizione corretta tra gli operatori $A_I^{(i)}(t_i)$.

3.2 Il metodo perturbativo per le teorie non relativistiche.

Vediamo come queste formule si applicano ad una teoria di campo non relativistica con una interazione H_I a due particelle data dalla formula (1.41). Si noti che l'evoluzione temporale dell'operatore $H_I(t)$ è determinata dalla hamiltoniana libera H_0 e dunque i campi che compaiono nell'espressione (1.41) sono campi liberi. In questo caso si ha

$$H_I \Phi_0 = 0, \qquad H_I \Phi^{(1)} = 0, \qquad \Phi^{(1)} \in \mathcal{H}^{(1)}. \tag{3.16}$$

Segue che il vuoto e gli stati ad una particella della teoria interagente coincidono con gli analoghi stati della teoria libera. Pertanto si ha

$$V(t, t_0)\Phi_0 = \Phi_0 \tag{3.17}$$

e dalla formula (3.15) si ottiene

$$\left(\Phi_0 \mathbf{T}\left(A_H^{(1)}(t_1) A_H^{(2)}(t_2) \cdots A_H^{(n)}(t_n)\right)\Phi_0\right) =$$

$$= \left(\Phi_0, \mathbf{T}\left(A_I^{(1)}(t_1) A_I^{(2)}(t_2) \cdots A_I^{(n)}(t_n) \exp\left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} H_I(t)\, dt\right)\right)\Phi_0\right). \tag{3.18}$$

Gli operatori $A_H^{(i)}(t_i)$ possono essere sostituiti con dei campi $\phi(x_i)$ o $\phi^*(x_i)$ interagenti nel formalismo di Heisenberg. Gli operatori $A_I^{(i)}(t_i)$ vanno sostituiti con i corrispondenti campi $\phi_0(x_i)$ o $\phi_0^*(x_i)$ nella rappresentazione di interazione, che sono campi liberi. È sottintesa una integrazione sulle variabili spaziali. Il valore di aspettazione nel vuoto di un prodotto ordinato nel tempo di campi viene usualmente chiamato *funzione di Green*. Questa formula esprime una funzione di Green del campo interagente in termini delle funzioni di Green, note, del campo libero. Dato che la formula vale per valori negativi di t' e positivi di t'' abbastanza grandi in valore assoluto, abbiamo considerato il limite $t' \to -\infty$, $t'' \to +\infty$.

Consideriamo il caso in cui il potenziale a due particelle, indipendente dal tempo, ha un raggio di azione finito. Se Φ è un elemento dello spazio di Fock con funzioni d'onda abbastanza regolari, abbiamo

$$V(0, t)\Phi = \exp(itH)\exp(-itH_0)\Phi =$$

$$= \Phi - i \int_t^0 \exp(it'H) H' \exp(-it'H_0)\Phi \, dt'. \tag{3.19}$$

Lo stato $\exp(-it'H_0)\Phi$ rappresenta particelle libere e se $|t'|$ è molto grande, la probabilità che la loro distanza sia minore del raggio di azione del potenziale è molto piccola. Pertanto $\|H' \exp(-it'H_0)\Phi\|$ tende a zero per $t' \to \pm\infty$ ed una valutazione quantitativa mostra che l'integrale sopra scritto converge nel limite $t \to \pm\infty$. In conclusione esiste il limite

$$\Phi_{\rm in} = \lim_{t \to -\infty} V(0,t)\Phi =$$

$$= \Phi - i \int_{-\infty}^0 \exp(it'H) H' \exp(-it'H_0)\Phi \, dt'. \tag{3.20}$$

In modo analogo si definisce il limite

$$\Phi_{\rm out} = \lim_{t \to +\infty} V(0,t)\Phi. \tag{3.21}$$

Nel formalismo di Heisenberg i vettori $\Phi_{\rm in}$ e $\Phi_{\rm out}$ rappresentano stati che, rispetto a misure eseguite al tempo $t \to \mp\infty$, si comportano come lo stato di particelle libere Φ. L'ampiezza di probabilità di transizione tra uno stato iniziale Φ ed uno stato finale Ψ è data da

$$(\Psi_{\rm out}, \Phi_{\rm in}) = (V(0,+\infty)\Psi, V(0,-\infty)\Phi). \tag{3.22}$$

Queste espressioni sono gli elementi della *matrice di scattering* o matrice S. Gli operatori $V(0,\pm\infty)$ sono limiti forti di operatori unitari e dunque sono isometrici, ma in generale essi non sono unitari. Infatti, se la teoria ha stati legati di due o più particelle, i corrispondenti vettori di stato non si possono scrivere nella forma $V(0,\pm\infty)\Phi$. Se il potenziale a due particelle è repulsivo, non vi sono stati legati, gli operatori $V(0,\pm\infty)$ sono unitari e si può scrivere

$$(\Psi_{\rm out}, \Phi_{\rm in}) = (\Psi, S_0\Phi), \tag{3.23}$$

dove

$$S_0 = V(0,+\infty)^* V(0,-\infty) = \lim_{t' \to -\infty \; t'' \to +\infty} V(t'', t'). \tag{3.24}$$

Il limite va inteso in senso debole. Formalmente si può scrivere

$$S_0 = \mathbf{T} \exp\left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} H_I(t)\, dt\right). \tag{3.25}$$

Se esistono stati legati, si possono definire degli stati Φ_{in} e Φ_{out} che per $t \to \mp\infty$ si comportano come uno stato che contiene sia particelle "elementari" che stati legati molto distanti tra loro. Si noti che in questo caso Φ non è un elemento dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ della teoria e la formula (3.23) non definisce un operatore S_0 in tale spazio. Se l'insieme di tutti i vettori Φ_{in} genera lo spazio $\mathcal{H}$ e lo stesso avviene per i vettori Φ_{out}, si dice che la teoria è *asintoticamente completa*. In tal caso, si può definire un operatore di scattering S unitario nello spazio $\mathcal{H}$ per mezzo delle formule equivalenti

$$(\Psi_{\mathrm{out}}, \Phi_{\mathrm{in}}) = (\Psi_{\mathrm{in}}, S\Phi_{\mathrm{in}}) = (\Psi_{\mathrm{out}}, S\Phi_{\mathrm{out}}), \qquad \Phi_{\mathrm{in}} = S\Phi_{\mathrm{out}}. \tag{3.26}$$

Questa definizione si svolge tutta all'interno del formalismo di Heisenberg senza implicare il formalismo di interazione. Pertanto essa si applica senza problemi alle teorie relativistiche locali asintoticamente complete, in assenza di particelle di massa nulla. Se esistono particelle di massa nulla, la definizione degli stati asintotici presenta nuovi problemi.

3.3 Il metodo perturbativo per le teorie relativistiche locali.

Studiamo piú in dettaglio i prodotti **T**-ordinati di due campi relativistici locali. Possiamo scrivere

$$\mathbf{T}(\phi(x)\psi(y)) = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\psi(y) \pm \theta(y^0 - x^0)\psi(y)\phi(x), \tag{3.27}$$

dove il segno $-$ appare se i due campi sono fermionici. In generale il prodotto tra una distribuzione ed una funzione discontinua può non essere ben definito. Per i campi liberi questa espressione ha senso perchè integrando sulle coordinate spaziali $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ si ottengono operatori funzioni (non distribuzioni) delle variabili x^0 ed y^0.

L'espressione sopra scritta sembra dipendere dalla scelta del riferimento e dunque della coordinata temporale, ma essa può essere riscritta nella seguente forma relativisticamente covariante:

$$\mathbf{T}(\phi(x)\psi(y)) = \theta(x^0 - y^0)[\phi(x)\psi(y)]_{\mp} \pm \psi(y)\phi(x). \tag{3.28}$$

L'(anti)commutatore si annulla fuori del cono di luce e dunque il compito della funzione $\theta(x^0 - y^0)$ è semplicemente di eliminare il contributo del cono passato. Si deve notare, tuttavia, che la definizione del prodotto **T**-ordinato può essere ambigua nel punto $x - y = 0$, dove la discontinuità della funzione a scalino ed il supporto del commutatore si incontrano. Queste osservazioni si possono facilmente estendere al prodotto **T**-ordinato di più campi. Questo è un esempio delle strette relazioni che sussistono tra covarianza di Lorentz e località.

Se vogliamo che le formule perturbative descritte nelle sezioni precedenti definiscano una teoria di campi interagenti locali e covarianti, la Hamiltoniana di interazione $H_I(t)$ deve essere l'integrale spaziale di una densità Hamiltoniana locale. Gli unici campi locali costruiti a partire dai campi nella rappresentazione di interazione, cioè dai campi liberi, sono i prodotti normali di Wick. L'esempio più semplice, limitandosi ad un campo scalare hermitiano, è

$$H_I(t) = g \int :\phi_0(x)^3: \, d^3\mathbf{x}. \tag{3.29}$$

Sfortunatamente, come abbiamo visto nel Capitolo precedente, questo integrale non definisce un operatore, neppure se si inserisce sotto il segno di integrale una fuzione di prova $f(\mathbf{x})$ rapidamente decrescente. Pertanto il formalismo di interazione non è applicabile.

Per ottenere un operatore, bisogna considerare un prodotto di campi in punti leggermente diversi, cioè considerare l'integrale

$$H_I(t) = g \int f_R(\mathbf{x}) \delta_\epsilon^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \delta_\epsilon^3(\mathbf{z} - \mathbf{x}) : \phi(x)\phi(y)\phi(z) : \, d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{z}, \quad (3.30)$$

dove $f_R(\mathbf{x})$ e $\delta_\epsilon^3(\mathbf{x})$ sono funzioni di prova. Questa è una Hamiltoniana *regolarizzata*, che permette l'uso del metodo perturbativo. La Hamiltoniana di interazione locale si ottiene considerando i due limiti

$$\lim_{R\to\infty} f_R(\mathbf{x}) = 1, \qquad \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon^3(\mathbf{x}) = \delta^3(\mathbf{x}). \quad (3.31)$$

Questi limiti vanno eseguiti nelle formule finali. Il primo è un limite di volume infinito, simile a quello che abbiamo incontrato in meccanica statistica e verrà discusso nel seguito di questa Sezione. Il secondo limite produce divergenze *ultraviolette* che devono essere compensate variando anche altri parametri, quali la massa e la costante di accoppiamento g. Questo è il procedimanto di *rinormalizzazione*. Nella pratica, si usano altri metodi di regolarizzazione che hanno un significato fisico meno diretto, ma sono più comodi per i calcoli.

Il limite di volume infinito è reso delicato dal fatto che $H_I(t)$ contiene termini che sono il prodotto di tre operatori di creazione, che non si annullano quando si applicano al vuoto Φ_0, contrariamente a quanto avviene nelle teorie non relativistiche (vedi la formula (3.16)). Ne segue che Φ_0 non è un autovettore della Hamiltoniana totale H, il cui stato fondamentale è un altro vettore Ω, il vuoto della teoria interagente. Se la funzione $f_R(\mathbf{x})$ decresce abbastanza rapidamente, Ω è un vettore dello spazio di Fock, indistinguibile da Φ_0 in regioni molto distanti dall'origine. Nel limite di volume infinito, Ω differisce sostanzialmente da Φ_0 in tutto lo spazio e dunque non può appartenere allo spazio di Fock. Si può anche osservare che nel limite di volume infinito Ω diventa invariante per traslazioni, ma l'unico elemento dello spazio di Fock invariante per traslazioni è $\Phi_0 \neq \Omega$. Lo stato Ω assomiglia dunque allo stato che descrive un fluido infinito, con la differenza che, dopo il limite $\epsilon \to 0$, esso è Lorentz invariante.

Supponiamo che il vuoto Ω della teoria interagente sia l'unico autovettore corrispondente allo spettro discreto di H e che sia

$$H\Omega = E_0\Omega. \quad (3.32)$$

Si può dunque scrivere

$$\Phi_0 = C\Omega + \hat{\Phi}, \tag{3.33}$$

dove $\hat{\Phi}$ è ortogonale a Ω e dunque, in una rappresentazione in cui H è diagonale, si puo descrivere con una funzione d'onda del tipo $\hat{\Phi}_\alpha(E)$. Se Ψ è un qualunque altro vettore dello spazio di Fock, si ha

$$(\Psi, \exp(it(H - E_0))\hat{\Phi}) = \int \exp(it(E - E_0)) \sum_\alpha \overline{\Psi_\alpha(E)} \hat{\Phi}_\alpha(E)\, dE \tag{3.34}$$

e da una nota proprietà della trasformata di Fourier di una funzione integrabile si ottiene

$$\lim_{t\to\pm\infty} (\Psi, \exp(it(H - E_0)\hat{\Phi}) = 0. \tag{3.35}$$

Segue che

$$\lim_{t\to\pm\infty} \exp(-itE_0) V(0,t)\Phi_0 = \lim_{t\to\pm\infty} \exp(it(H - E_0))\Phi_0 = C\Omega, \tag{3.36}$$

dove il limite va inteso in senso debole. Nel limite di volume infinito si ha $C \to 0$ e, se lo stato Ω ha una densità di energia finita, si ha anche $E_0 \to \infty$.

Dalla equazione (3.15) si ottiene, sostituendo i campi $\phi(x_i)$ e $\phi_0(x_i)$ agli operatori $A_H^{(i)}(t_i)$ e $A_I^{(i)}(t_i)$,

$$(V(0,t'')\Phi_0, \mathbf{T}\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\right) V(0,t')\Phi_0) =$$

$$= \left(\Phi_0, \mathbf{T}\left(\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\cdots\phi_0(x_n) \exp\left(-i\int_{t'}^{t''} H_I(t)\, dt\right)\right) \Phi_0\right) \tag{3.37}$$

ed usando la (3.36) si ha

$$|C|^2 \left(\Omega, \mathbf{T}\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\right)\Omega\right) = \lim_{t'\to-\infty\ t''\to+\infty} \exp(i(t''-t')E_0))\cdot$$

$$\cdot \left(\Phi_0, \mathbf{T}\left(\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\cdots\phi_0(x_n) \exp\left(-i\int_{t'}^{t''} H_I(t)\, dt\right)\right) \Phi_0\right) \tag{3.38}$$

ed in particolare

$$|C|^2 = \lim_{t'\to-\infty\ t''\to+\infty} \exp(i(t''-t')E_0)\cdot$$

$$\cdot \left(\Phi_0, \mathbf{T}\exp\left(-i\int_{t'}^{t''} H_I(t)\, dt\right) \Phi_0\right). \tag{3.39}$$

Considerando il rapporto delle due ultime espressioni, si ottiene la formula di Gell-man e Low:

$$(\Omega, \mathbf{T}\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\right)\Omega) = \lim_{t'\to-\infty\, t''\to+\infty}$$

$$\frac{\left(\Phi_0, \mathbf{T}\left(\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\cdots\phi_0(x_n)\exp\left(-i\int_{t'}^{t''} H_I(t)\,dt\right)\right)\Phi_0\right)}{\left(\Phi_0, \mathbf{T}\exp\left(-i\int_{t'}^{t''} H_I(t)\,dt\right)\Phi_0\right)}. \tag{3.40}$$

Nel numeratore e nel denominatore della frazione sopra scritta si possono espandere gli esponenziali e si ottiene una somma di integrali nei quali compaiono valori di aspettazione nel vuoto di prodotti di campi liberi. Se si rappresentano questi VEV in termini di valori di aspettazione troncati (TVEV), essi si presentano come prodotti di funzioni del tipo

$$(\Phi_0, \mathbf{T}(\phi_0(x)\phi_0(y))\Phi_0) = -iD^C(x-y). \tag{3.41}$$

La funzione $D^C(x)$ è nota come *funzione di Green causale* o *propagatore di Feynman*. Quando si esaminano i vari integrali, si vede che alcuni di essi divergono nel limite $t' \to -\infty$, $t'' \to +\infty$ ed anche nel limite di volume infinito $f_R(\mathbf{x}) \to 1$. I termini divergenti che compaiono al numeratore vengono cancellati dai termini divergenti a denominatore ed i termini rimanenti hanno limiti finiti. Rimane, naturalmente il problema ben più difficile di trattare il limite locale $\epsilon \to 0$.

Le funzioni di Green dei campi interagenti permettono di ricostruire completamente la teoria. In particolare, se si considerano le loro trasformate di Fourier, la posizione dei poli di queste funzioni fornisce le masse delle particelle e degli stati legati. I residui di questi poli sono legati alle ampiezze di diffusione dalle *formule di riduzione*.

3.4 Stati asintotici e formule di riduzione.

In una teoria relativistica non esiste una distinzione netta tra particelle "elementari" e stati legati. Entrambi sono definiti come autostati corrispondenti allo spettro discreto dell'operatore $M^2 = P \cdot P$. Non è neppure necessaria una corrispondenza biunivoca tra particelle e campi. Per esempio, nel moderno modello "standard" delle particelle elementari, non esistono particelle asintotiche corrispondenti ai campi dei "quarks" e non esistono campi corripondenti alle particelle fortemente interagenti (adroni). Nel seguito useremo il termine "particella" sia per una particella elementare, che per uno stato legato.

Per costruire gli stati asintotici $\Phi_{\rm in}$ e $\Phi_{\rm out}$, bisogna innanzitutto procurarsi un operatore che applicato al vuoto dia uno stato ad una particella.