Introduzione a
GRUPPI ED ALGEBRE
IN MECCANICA QUANTISTICA.

M. Toller

1999

Capitolo 1

Il formalismo della Meccanica Quantistica.

1.1 Stati, osservabili, interpretazione statistica, dinamica.

Una teoria fisica si può considerare come una teoria matematica [1] in cui alcuni termini ed alcune relazioni (non necessariamente tutti) hanno una interpretazione fisica, di tipo operazionale. Una intepretazione operazionale è data in termini di operazioni eseguibili in laboratorio [2]. I termini e le relazioni che non hanno una interpretazione operazionale diretta sono indispensabili per stimolare l'intuizione e la fantasia, evitando, se possibile, di sconfinare nella metafisica. È importante ricordare che le teorie fisiche non forniscono una descrizione completa della realtà; sono modelli che rendono conto, talvolta con grande precisione, di alcuni aspetti del mondo fisico, ma hanno sempre un campo di validità limitato.

Ogni teoria si occupa di un particolare *sistema* fisico. Alcuni termini della teoria matematica rappresenteranno le *osservabili*, definite dalle operazioni fisiche che hanno come fine la determinazione (la misura) di un numero (il risultato della misura idealizzato come un numero reale). Altri termini potranno rappresentare lo *stato* del sistema, definito dalle operazioni che devono essere eseguite per prepararlo.

La teoria deve essere in grado di fornire delle previsioni sul risultato della misura di un'osservabile eseguita su di un certo stato. Tali previsioni possono essere esatte (deterministiche) oppure di natura statistica. Nel secondo caso si deve pensare di ripetere la misura dell'osservabile moltissime volte su sistemi nello stesso stato, cioè preparati nello stesso modo, e determinare le probabilità dei possibili risultati attraverso le loro frequenze.

Inoltre, la teoria deve essere in grado di calcolare lo stato del sistema all'istante t noto lo stato del sistema all'istante t_0 (condizione iniziale). In generale, questo si ottiene per mezzo di una equazione differenziale, che determina la *dinamica* del sistema.

Per chiarire questi concetti, consideriamo la meccanica classica [3–5] di un sistema di N particelle. I possibili stati del sistema sono rappresentati matematicamente dai punti dello *spazio delle fasi* determinati dalle $3N$ coordinate delle particelle e dalle $3N$ componenti delle loro quantità di moto. Le osservabili sono rappresentate matematicamente da funzioni reali sullo spazio delle fasi (con qualche proprietà di regolarità, per esempio continue). Il risultato della osservabile rappresentata dalla funzione f misurata sullo stato rappresentato dal punto P è proprio $f(P)$ ed è univocamente determinato. La dinamica è determinata da un sistema di equazioni differenziali del primo ordine per le coordinate dello spazio delle fasi. La meccanica classica è *deterministica* nel senso che la conoscenza dello stato al tempo t_0 permette di prevedere univocamente i risultati delle misure eseguite al tempo t.

In meccanica quantistica [6–9] uno stato è rappresentato matematicamente da un *raggio* (una retta complessa passante per l'origine) in uno spazio di Hilbert complesso separabile (cioè con una base numerabile). Possiamo anche rappresentare uno stato per mezzo di un vettore non nullo nello spazio di Hilbert, ricordando che vettori che differiscono per un fattore complesso, che appartengono allo stesso raggio, rappresentano lo stesso stato. Nel seguito indichiamo con $\phi, \psi, \ldots$ dei vettori nello spazio di Hilbert e con $\hat{\phi}, \hat{\psi}, \ldots$ i raggi che li contengono. Lo spazio degli stati è dunque uno spazio proiettivo complesso infinito-dimensionale o, nel caso più generale, l'unione di più spazi di questo tipo, detti *settori*, tra i quali operano *regole di superselezione* [10, 11], la cui natura sarà chiarita in seguito. Per ogni settore, indichiamo con $\hat{\mathcal{H}}_i$ lo spazio dei raggi e con $\mathcal{H}_i$ il corrispondente spazio di Hilbert. Per comodità matematica si può introdurre la somma diretta

$$\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}_i \tag{1.1}$$

e considerare gli spazi $\mathcal{H}_i$ come *sottospazi coerenti* di $\mathcal{H}$. Si deve però ricordare che somme di vettori che appartengono a diversi sottospazi coerenti non hanno alcun significato fisico.

Lo spazio proiettivo si può anche ottenere dalla sfera $\|\psi\| = 1$ identificando vettori che differiscono per un fattore di fase. La distanza $\|\phi - \psi\|$ definita sulla sfera induce la seguente distanza tra i raggi:

$$d(\hat{\phi}, \hat{\psi}) = \sqrt{2 - 2\,\hat{\phi} \cdot \hat{\psi}}, \tag{1.2}$$

dove si è introdotta la notazione

$$\hat{\phi} \cdot \hat{\psi} = |(\phi, \psi)|\, \|\phi\|^{-1} \|\psi\|^{-1}. \tag{1.3}$$

Per raggi appartenenti a settori diversi, poniamo $\hat{\phi} \cdot \hat{\psi} = 0$. Si vede che lo spazio degli stati ha una struttura di spazio metrico completo e che gli spazi $\hat{\mathcal{H}}_i$ sono le sue componenti connesse.

Le osservabili di una teoria quantistica sono rappresentate da *operatori lineari autoaggiunti* (in generale non limitati) nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, che trasformano ognuno dei sottospazi coerenti $\mathcal{H}_i$ in se stesso. Il risultato della misura di una osservabile su di un certo stato non è univocamente prevedibile, ma si può solo calcolare la distribuzione di probabilità dei risultati. L'interpretazione statistica della meccanica quantistica (dovuta a Max Born) si può condensare nei due postulati seguenti [7]:

a) Se si misura l'osservabile $\tilde{A}$ rappresentata dall'operatore A sullo stato rappresentato dal vettore ψ, il valore di aspettazione del risultato (cioè la media dei risultati di molte misure) è dato da

$$\langle \tilde{A} \rangle = (\psi, A\psi)\|\psi\|^{-2} = \mathrm{Tr}(AP), \tag{1.4}$$

dove P è l'operatore di proiezione sul raggio $\hat{\psi}$ a cui appartiene ψ. Si noti che il valor medio è reale perché A è hermitiano e che esso dipende solo dal raggio $\hat{\psi}$.

b) Se l'osservabile $\tilde{A}$ è rappresentata dall'operatore A ed f è una funzione reale di una variabile reale (continua o almeno di Borel), l'osservabile $f(\tilde{A})$ è rappresentata dall'operatore $f(A)$.

L'osservabile $f(\tilde{A})$ è definita dalla seguente operazione: si misura $\tilde{A}$; se il risultato è il numero a, il risultato di $f(\tilde{A})$ è $f(a)$. L'operatore $f(A)$ è ben definito perché l'operatore A è autoaggiunto e dunque ha la rappresentazione spettrale [12]

$$A = \int a \, dE(a), \tag{1.5}$$

dove $E(a)$ è la misura spettrale i cui valori sono operatori di proiezione. Si può dunque porre

$$f(A) = \int f(a) \, dE(a). \tag{1.6}$$

Se uno stato è rappresentato dal vettore normalizzato ψ si ha dunque

$$\langle f(\tilde{A}) \rangle = \int f(a) \, d(\psi, E(a)\psi). \tag{1.7}$$

È interessante il caso in cui $f = f_I$, la funzione caratteristica dell'insieme boreliano I sulla retta reale, perché in tal caso il valor medio di $f_I(\tilde{A})$ è la probabilità $\mathcal{P}(a \in I)$ che il risultato a della misura appartenga ad I. Si ha

$$f_I(A) = \int_I dE(a) = E(I), \tag{1.8}$$

$$\mathcal{P}(a \in I) = \langle f_I(A) \rangle = (\psi, E(I)\psi), \tag{1.9}$$

dove l'operatore di proiezione $E(I)$ è la misura spettrale dell'insieme I. Si vede che la misura spettrale ha una interpretazione fisica diretta.

Consideriamo ora il caso semplice in cui la misura spettrale è concentrata in alcuni punti a_i della retta reale, sui quali prende il valore E_i. La rappresentazione spettrale diventa

$$A = \sum_i a_i E_i \tag{1.10}$$

ed i risultati della misura possono prendere solo i valori a_i con probabilità

$$\mathcal{P}(a = a_i) = (\psi, E_i\psi). \tag{1.11}$$

Se $\phi_i = E_i\phi_i$, cioè ϕ_i appartiene al sottospazio su cui proietta E_i, si ha

$$A\phi_i = a_i\phi_i, \tag{1.12}$$

cioè a_i è un autovalore di A. Se l'autovalore a_i è non degenere cioè se E_i proietta su di un sottospazio unidimensionale (un raggio), si ha (se $\|\psi\| = \|\phi_i\| = 1$)

$$E_i\psi = \phi_i(\phi_i, \psi), \tag{1.13}$$

$$\mathcal{P}(a = a_i) = |(\phi_i, \psi)|^2 = (\hat{\phi}_i \cdot \hat{\psi})^2. \tag{1.14}$$

Si vede che il prodotto $\hat{\phi} \cdot \hat{\psi}$ definito nello spazio dei raggi, e dunque anche la distanza $d(\hat{\phi}, \hat{\psi})$, hanno una interpretazione probabilistica diretta. La quantità $(\hat{\phi} \cdot \hat{\psi})^2$ è detta *probabilità di transizione* tra i due stati. La probabilità di transizione tra stati appartenenti a settori diversi è nulla.

La dispersione dei risultati di una misura è data da

$$\Delta\tilde{A} = \langle(\tilde{A} - \langle\tilde{A}\rangle)^2\rangle^{1/2} = (\psi, (\tilde{A} - \langle\tilde{A}\rangle)^2\psi)^{1/2} = \|(A - \langle\tilde{A}\rangle)\psi\| \tag{1.15}$$

e si annulla se e solo se ψ è un autovettore di A. Date due osservabili $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$, è facile dimostrare la seguente *relazione di indeterminazione*

$$\Delta\tilde{A}\Delta\tilde{B} \geq \tfrac{1}{2}|(\psi, [A, B]\psi)|, \tag{1.16}$$

che mostra che vi sono dei limiti alla precisione con cui possono essere determinate due osservabili non commutanti.

Se abbiamo n osservabili $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ tali che i relativi operatori commutano tra di loro (nel senso che commutano i loro proiettori spettrali), si può scrivere una rappresentazione spettrale comune

$$A_i = \int a_i \, dE(a_1, \ldots, a_n), \tag{1.17}$$

dove l'integrale è esteso ad R^n. In questo caso si dice che le n osservabili sono tra di loro *compatibili* ed esse si possono considerare come una singola osservabile il cui risultato è costituito da n numeri reali. La probabilità che questi numeri determinino un punto di R^n appartenente ad un insieme boreliano I è data da

$$\mathcal{P}(\{a_i\} \in I) = (\psi, \int_I dE\psi) = (\psi, E(I)\psi). \tag{1.18}$$

Un esempio di osservabili compatibili sono le coordinate di una particella.

In modo analogo, come discuteremo in seguito, si può considerare un'osservabile i cui risultati sono rappresentati da punti in uno spazio topologico S e descriverla matematicamente per mezzo di una misura spettrale E definita sugli insiemi boreliani di S. Ricordiamo che una misura spettrale di tipo generale soddisfa alle relazioni

$$E(\emptyset) = 0, \qquad E(S) = 1, \qquad E(I \cap J) = E(I)E(J),$$

$$E(\bigcup_n I_n) = \sum_n E(I_n), \tag{1.19}$$

dove $\{I_n\}$ è una famiglia numerabile di insiemi boreliani disgiunti.

Gli stati considerati finora sono detti *stati puri*, ma è utile introdurre anche degli *stati misti* di carattere più generale. Consideriamo un insieme di vettori ψ_i normalizzati e gli operatori di proiezione P_i sui raggi $\hat{\psi}_i$. Siano $\{p_i\}$ dei numeri positivi con $\sum_i p_i = 1$. Possiamo costruire operativamente una sovrapposizione *incoerente* degli stati $\hat{\psi}_i$ nel seguente modo: estraiamo a sorte uno dei valori assunti dall'indice i usando le probabilità $\{p_i\}$ e prepariamo lo stato corrispondente. È chiaro che il valor medio dell'osservabile rappresentata dall'operatore A su questo stato misto è dato da

$$\langle \tilde{A} \rangle = \sum_i p_i(\psi_i, A\psi_i) = \sum_i p_i \mathrm{Tr}(AP_i) = \mathrm{Tr}(AD), \tag{1.20}$$

dove

$$D = \sum_i p_i P_i, \qquad \mathrm{Tr} D = 1. \tag{1.21}$$

D è *l'operatore densità* che descrive lo stato misto.

La dinamica di un sistema quantistico è descritta da un gruppo continuo ad un parametro di operatori unitari $U(t)$:

$$\psi(t) = U(t-t_0)\psi(t_0), \qquad U(t)U(t') = U(t+t'), \qquad U(0) = 1. \tag{1.22}$$

Essi devono trasformare ogni sottospazio $\mathcal{H}_i$ in se stesso. Il carattere unitario di questi operatori sarà discusso nel seguito. Per ora, si noti che essi inducono una trasformazione isometrica dello spazio dei raggi. L'evoluzione temporale dell'operatore densità che rappresenta uno stato misto è data da

$$D(t) = U(t-t_0)D(t_0)U(t-t_0)^*. \tag{1.23}$$

Il teorema di Stone [12] ci assicura l'esistenza di un operatore autoaggiunto H tale che

$$U(t) = \exp(-it/\hbar H). \tag{1.24}$$

Se $\psi(t)$ appartiene al dominio di H vale *l'equazione di Schrödinger*

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H\psi. \tag{1.25}$$

L'operatore H rappresenta l'osservabile energia. La costante di Planck $\hbar = (2\pi)^{-1}h$ deve comparire se si usano le unità di misura usuali per l'energia. Nei prossimi capitoli useremo sempre un sistema di unità in cui $\hbar = 1$.

Per avere un comportamento termodinamico del sistema, è necessario assumere che H sia limitato inferiormente

$$(\psi, H\psi) \geq C\|\psi\|^2. \tag{1.26}$$

dova C è una costante reale.

Questo modo di descrivere l'evoluzione temporale del sistema, in cui lo stato $\psi(t)$ dipende dal tempo, è il *formalismo di Schrödinger.* Talvolta è più utile il *formalismo di Heisenberg* in cui lo stato non dipende dal tempo (in un certo senso descrive l'intera storia del sistema), ma osservabili misurate in tempi diversi sono considerate diverse. Per passare da un formalismo all'altro basta porre

$$\psi_H = \psi_S(0), \qquad A_H(t) = U^{-1}(t) A_S U(t). \tag{1.27}$$

da cui segue l'equazione del moto di Heisenberg

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[A_H(t), H]. \tag{1.28}$$

Siccome si ha

$$(\psi_H, A_H(t)\psi_H) = (\psi_S(t), A_S\psi_S(t)), \tag{1.29}$$

le previsioni statistiche della teoria sono le stesse nei due formalismi.

1.2 Topologia ed algebre di operatori.

Nella sezione precedente abbiamo trascurato alcuni problemi di carattere topologico che si presentano già in meccanica classica. Per esempio, non abbiamo specificato le proprietà di regolarità delle funzioni definite sullo spazio delle fasi Γ che rappresentano le osservabili. Un altro aspetto del problema è la determinazione della struttura matematica fisicamente rilevante dello spazio delle fasi: se scegliamo funzioni differenziabili Γ deve essere una varietà differenziabile, se scegliamo funzioni continue Γ deve essere uno spazio topologico, se consideriamo tutte le funzioni di Borel, si può limitarsi a considerare su Γ la struttura molto più debole definita dagli insiemi boreliani. In quest'ultimo caso, la struttura di Γ non specifica neppure il numero di gradi di libertà del sistema. Un'analisi approfondita di questi problemi sia nel caso classico che in quello quantistico si trova in [13].

Poincaré [14] ha osservato che il significato fisico delle strutture topologiche è legato alla presenza degli errori di misura. Consideriamo un insieme finito di osservabili $\tilde{A}_i$ rappresentate dalle funzioni reali f_i sullo spazio delle fasi Γ. Quando misuriamo l'osservabile $\tilde{A}_i$, a causa degli errori di misura, possiamo solo affermare che il suo valore è contenuto in un certo intervallo aperto I_i dell'asse reale tanto più piccolo quanto più preciso è lo strumento di misura. In questo modo non determiniamo un punto nello spazio delle fasi, ma solo un insieme della forma

$$\bigcap_i f_i^{-1}(I_i). \tag{1.30}$$

Tutti gli insiemi di questo tipo formano una base di una topologia di Γ rispetto alla quale tutte le funzioni f_i che rappresentano osservabili sono continue. L'ipotesi che la topologia sia di Hausdorff implica che si possano costruire strumenti di misura precisi quanto si vuole. Si vede dunque che la topologia di Γ contiene importanti informazioni fisiche.

Data una osservabile $\tilde{A}$, i cui risultati appartengono ad un insieme S, lo *spettro* di $\tilde{A}$, abbiamo definito la funzione $f(\tilde{A})$. Se f non è continua sull'insieme S, piccoli errori nella misura di $\tilde{A}$ potranno provocare grandi errori nel risultato di $f(\tilde{A})$ e l'utilità fisica di quest'ultima osservabile diventa abbastanza dubbia. Questo argomento illustra l'importanza del concetto di continuità in fisica.

In una teoria classica sarà dunque naturale assegnare allo spazio delle fasi una opportuna topologia ed interpretare come osservabili solo funzioni continue (non necessariamente tutte). Nel presente contesto è anche opportuno limitarsi a considerare osservabili *limitate*, che prendono valori in un insieme S limitato e sono dunque rappresentate da funzioni limitate. Se l'osservabile $\tilde{A}$ non è limitata, basterà sostituirla con l'osservabile $\arctan(\tilde{A})$ che è limitata e fornisce esattamente le stesse informazioni sul sistema. Volendo ampliare il concetto di osservabile in modo che il limite di una successione di osservabili sia ancora una osservabile, bisognerà limitarsi ai limiti uniformi, che mantengono la proprietà di continuità.

È anche naturale assumere che somme e prodotti di osservabili siano osservabili. Supporremo dunque che le osservabili di una teoria classica siano rappresentate dagli elementi di una algebra $\mathcal{A}$ di funzioni continue e limitate sullo spazio delle fasi, completa rispetto alla norma

$$\|f\| = \sup_{P\in\Gamma} |f(P)|. \tag{1.31}$$

È conveniente dal punto di vista matematico considerare un'algebra di funzioni complesse, ricordando che solo le funzioni reali rappresentano osservabili. L'elemento unità, dato dalla funzione $f = 1$, rappresenta l'osservabile banale il cui risultato è sempre 1.

Esaminiamo le proprietà formali di quest'algebra [15–18]. Per evidenziare il carattere astratto dell'algebra, indichiamo i suoi elementi con le lettere $x, y, \ldots$. Oltre alle operazioni di somma, prodotto e moltiplicazione per un numero complesso, con le solite proprietà, esiste una norma rispetto alla quale $\mathcal{A}$ è uno spazio normato completo (spazio di Banach) con le proprietà

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|, \qquad \|e\| = 1, \tag{1.32}$$

se l'unità e esiste. $\mathcal{A}$ è dunque un'algebra di Banach. Esiste anche un'operazione di *involuzione* $x \to x^*$ (in un'algebra di funzioni si ha $f^* = \overline{f}$) con le proprietà

$$\begin{aligned} (x^*)^* = x, &\qquad (x+y)^* = x^* + y^*, \\ (cx)^* = \overline{c}x^*, &\qquad (xy)^* = y^*x^*. \end{aligned} \tag{1.33}$$

$\mathcal{A}$ è dunque un'algebra *involutiva* o *simmetrica*. Un insieme $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ si dice simmetrico se $x \in \mathcal{I}$ implica $x^* \in \mathcal{I}$. Gli elementi con la proprietà $x = x^*$ si dicono *hermitiani*. Queste definizioni valgono anche per algebre non commutative.

Un'algebra C^* è un'algebra di Banach involutiva con o senza unità con la proprietà

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \tag{1.34}$$

evidentemente soddisfatta da un'algebra di funzioni. Assumeremo dunque che le osservabili limitate di una teoria classica siano rappresentate dagli elementi hermitiani di una algebra C^* commutativa $\mathcal{A}$. È anche naturale assumere che $\mathcal{A}$ sia separabile, cioè che contenga un sottinsioeme numerabile denso. È interessante vedere fino che punto la struttura di $\mathcal{A}$, considerata come un'algebra C^* astratta, determina la struttura dello spazio delle fasi Γ e le funzioni f che rappresentano le osservabili.

Un *carattere* di un'algebra di Banach commutativa $\mathcal{A}$ è un funzionale lineare non nullo k su $\mathcal{A}$ con le proprietà

$$|k(x)| \leq \|x\|, \qquad k(xy) = k(x)k(y). \tag{1.35}$$

In altri termini, k è un omomorfismo continuo di $\mathcal{A}$ sull'algebra unidimensionale dei numeri complessi. Se $\mathcal{A}$ possiede una unità e, si ha $k(e) = 1$ e k è necessariamente non nullo. Indichiamo con S lo *spettro* di $\mathcal{A}$, cioè l'insieme dei suoi caratteri. L'*omomorfismo di Gelfand* associa ad ogni elemento $x \in \mathcal{A}$ una funzione limitata $\hat{f}$ su S definita da

$$\hat{f}(k) = k(x). \tag{1.36}$$

Se si definisce su S la topologia più debole che rende tutte le funzioni $\hat{f}$ continue, esso diventa uno spazio topologico localmente compatto ed anche compatto se $\mathcal{A}$ possiede una unità. Una base di questa topologia è data da intersezioni finite del tipo

$$\bigcap_i \hat{f}_i^{-1}(I_i), \tag{1.37}$$

dove I_i sono intervalli aperti.

Gelfand e Naimark hanno dimostrato il seguente importante risultato [15–18]:

Teorema 1 *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra C^* commutativa con unità, l'omomorfismo di Gelfand sopra definito è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ sull'algebra di tutte le funzioni continue limitate definite sul suo spettro S, che è compatto. Oltre alla struttura algebrica, esso preserva anche la norma e l'involuzione. Se non si assume che $\mathcal{A}$ possiede l'unità, si può solo dire che S è localmente compatto ed $\mathcal{A}$ è isomorfa all'algebra delle funzioni continue su S che tendono a zero all'infinito.*

Si dimostra che $\mathcal{A}$ è separabile se e solo se lo spazio localmente compatto S ha una base numerabile di insiemi aperti.

Ritorniamo ora al caso in cui $\mathcal{A}$ è una algebra C^* di funzioni continue limitate sullo spazio delle fasi Γ. Se $P \in \Gamma$, $k(f) = f(P)$ è un carattere, cioè un punto di S. Supponiamo che se $P, P' \in \Gamma$ esista una funzione $f \in \mathcal{A}$ tale che $f(P) \neq f(P')$. Allora l'applicazione $\Gamma \to S$ sopra definita è iniettiva e si può considerare Γ come un sottospazio di S. Supponiamo anche che la topologia di Γ sia quella indotta dalla topologia di S; allora S è una *compattificazione* di Γ. Nelle teorie usuali lo spazio delle fasi Γ non è compatto, ma, almeno se i gradi di libertà sono finiti, è localmente compatto. Segue che S contiene anche dei *punti all'infinito* e che solo le funzioni che possono essere estese a funzioni continue su S rappresentano osservabili.

Se Γ è localmente compatto, la più semplice compattificazione è quella che aggiunge un solo punto all'infinito. In questo caso, $\mathcal{A}$ contiene tutte le funzioni $f(P)$ continue su Γ che tendono ad un limite finito quando $P \to \infty$. Ricordiamo che in uno spazio localmente compatto gli intorni dell'infinito sono i complementi dei sottoinsiemi compatti. Ad esempio, se si adotta questo punto di vista, $\arctan q$ dove q è una coordinata non rappresenta una osservabile, perché questa funzione tende a due limiti diversi $\pm\pi/2$ quando $q \to \pm\infty$. La scelta corretta della compattificazione di Γ dipende dalle proprietà dei dispositivi sperimentali. Per esempio, nel caso appena considerato occorre indagare se, quando la particella sta fuori del laboratorio (cioè $|q|$ è molto grande), gli strumenti sono in grado di determinare il segno di q.

In una teoria quantistica le considerazioni precedenti sono ancora valide se ci si riferisce ad un insieme di osservabili compatibili, rappresentate da operatori commutanti. Anche in questo caso possiamo limitarci a considerare osservabili limitate rappresentate da operatori hermitiani limitati. A partire da questi operatori, considerando lo loro funzioni polinomiali a coefficienti complessi ed i loro limiti rispetto alla norma

$$\|A\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|A\psi\|, \tag{1.38}$$

si ottiene una algebra di Banach commutativa di operatori. Se l'aggiunto di un operatore è definito nel solito modo, si vede che la condizione (1.34) è soddisfatta e dunque abbiamo un'algebra C^*, che si dice *generata* dall'insieme di operatori. Possiamo ammettere che tutti i suoi elementi hermitiani rappresentino osservabili tra di loro compatibili.

È ragionevole, ma non del tutto giustificato, supporre che tutte le osservabili limitate di una teoria quantistica siano rappresentate dagli elementi hermitiani di un'algebra C^* non commutativa di operatori in uno spazio di Hilbert separabile [19–21]. Si potrebbe giustificare questa ipotesi a partire da altre ipotesi più naturali, ma qui preferiamo notare che i modelli quantistici basati su di essa sono in ottimo accordo con l'esperienza. È interessante discutere le ragioni per cui consideriamo un'algebra di operatori chiusa rispetto alla norma e non rispetto ad una tolopogia più debole. Abbiamo visto nel caso di un'algebra commutativa, che è essenzialmente un'algebra di funzioni, come i limiti rispetto alla norma non facciano uscire dalla classe delle funzioni continue. La chiusura rispetto alla norma non distrugge dunque le informazioni contenute nell'algebra riguardo alle proprietà topologiche del sistema. Una situazione simile si trova in teorie di campo [20, 21] riguardo alle proprietà di località della teoria, cioè riguardo al fatto che le osservabili si riferiscono a regioni limitate dello spazio-tempo.

Altre proprietà della teoria, in particolare quelle riguardanti la commutatività degli operatori, non vengono perse quando si considera la chiusura *debole* dell'algebra delle osservabili. Esse si formulano più facilmente in termini di algebre C^* di operatori debolmente chiuse, dette *algebre di von Neumann* [15–17]. Ricordiamo che la topologia debole nello spazio degli operatori è definita dalle seminorme

$$A \to |(\phi, A\psi)|, \qquad \phi, \psi \in \mathcal{H}. \tag{1.39}$$

Il prodotto ed il commutatore di due operatori sono funzioni debolmente continue di uno degli operatori quando l'altro è tenuto fisso. Se $\mathcal{I}$ è un insieme qualunque di operatori, indichiamo con $\mathcal{I}'$ il suo *commutante* composto di tutti gli operatori limitati che commutano con tutti gli elementi di $\mathcal{I}$. Si vede immediatamente che, se $\mathcal{I}$ è simmetrico, $\mathcal{I}'$ è un'algebra di von Neumann. Inoltre, si dimostra che tutte le algebre di von Neumann si ottengono in questo modo e che se $\mathcal{A}$ è un'algebra simmetrica di operatori, $\mathcal{A}''$ è la sua chiusura debole. In particolare, se $\mathcal{A}$ è un'algebra di von Neumann, si ha $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

Se A è un operatore limitato hermitiano che rappresenta un'osservabile, esso genera un'algebra C^* $\mathcal{A}$ ed un'algebra di von Neumann $\mathcal{A}''$ che è la chiusura debole di $\mathcal{A}$. Vedremo nella prossima sezione che $\mathcal{A}''$ contiene $f(A)$ dove f è una qualunque funzione di Borel limitata definita sullo spettro di

A. Per quanto abbiamo osservato all'inizio di questa sezione, è fisicamente ingiustificato assumere che tutti gli operatori di $\mathcal{A}''$ rappresentino osservabili.

1.3 Rappresentazioni spettrali, integrali diretti e funzioni d'onda.

I concetti algebrici esposti nella Sezione precedente permettono di chiarire e generalizzare la rappresentazione spettrale degli operatori autoaggiunti. Consideriamo un insieme di operatori limitati hermitiani, che generano un'algebra C^* commutativa $\mathcal{A}$. Sia S lo spettro di $\mathcal{A}$ e sia $f \to F(f)$ l'inverso dell'isomorfismo di Gelfand, che assegna ad ogni funzione continua sull'insieme compatto S l'operatore $F(f) \in \mathcal{A}$. Vogliamo estendere questa applicazione a tutte le funzioni f boreliane definite su S.

Consideriamo il funzionale $f \to (\phi, F(f)\psi)$ definito sullo spazio delle funzioni continue su S. Esso è lineare e continuo e pertanto definisce una misura complessa $\mu_{\phi\psi}$ tale che

$$(\phi, F(f)\psi) = \int_S f(k)\, d\mu_{\phi\psi}(k), \qquad \phi, \psi \in \mathcal{H}. \tag{1.40}$$

Il secondo membro ha senso anche se f è una funzione boreliana limitata e siccome è una forma hermitiana limitata, esso definisce un operatore limitato $F(f)$ in modo che la (1.40) vale anche in questo caso più generale. Si dimostra [17] che, anche se f non è continua, l'applicazione $f \to F(f)$ è lineare ed ha le proprietà

$$\begin{gathered} F(f) \in \mathcal{A}'', \qquad \|F(f)\| = \|f\|, \\ F(\overline{f}) = F(f)^*, \qquad F(fg) = F(f)F(g), \end{gathered} \tag{1.41}$$

dove

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup} |f(k)|. \tag{1.42}$$

Per ogni insieme boreliano I definiamo l'operatore $E(I) = F(f_I) \in \mathcal{A}''$, dove f_I è la funzione caratteristica di I. Dalle proprietà sopra scritte segue che gli operatori $E(I)$ sono proiettori e che ess formano una misura spettrale su S, cioè soddisfano alle condizioni (1.19). Inoltre, si ha

$$\mu_{\phi\psi}(I) = (\phi, E(I)\psi). \tag{1.43}$$

Possiamo scrivere la rappresentazione spettrale

$$F(f) = \int_S f(k)\, dE(k), \tag{1.44}$$

dove l'integrale va inteso in senso debole, definito dalla (1.40). Se f è continua, l'integrale può essere definito come limite rispetto alla norma della ovvia generalizzazione delle somme di Riemann. In conclusione, abbiamo visto che [15–17]

Teorema 2 *Per ogni algebra C^* di operatori commutativa, esiste una misura spettrale E sul suo spettro S tale che l'isomorfismo di Gelfand è descritto dalla rappresentazione spettrale* (1.44).

Fissiamo l'attenzione su di una funzione reale f definita su S, consideriamo l'operatore hermitiano $F = F(f)$ ed indichiamo con $S' = f(S)$ il suo spettro, un sottoinsieme compatto dell'asse reale. Se consideriamo su S' la misura indotta

$$E'(I') = E(f^{-1}(I')), \tag{1.45}$$

otteniamo la rappresentazione spettrale nella forma più elementare

$$F = \int_{S'} f\, dE'(f). \tag{1.46}$$

Nella formulazione elementare della meccanica quantistica gli elementi di $\mathcal{H}$ sono rappresentati da *funzioni d'onda* sulle quali un certo insieme di operatori tra di loro commutamti (le coordinate o le componenti delle quantità di moto) agiscono in modo moltiplicativo molto semplice. Ora vogliamo descrivere un metodo generale per ottenere rappresentazioni di questo tipo.

Consideriamo dapprima un caso molto semplice. Sia F un operatore autoaggiunto con spettro discreto dato dalla rappresentazione spettrale discreta

$$F = \sum_k f_k E_k. \tag{1.47}$$

Lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ si può considerare come una somma diretta

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_k \tag{1.48}$$

dei sottospazi $\mathcal{H}_k$ su cui proiettano gli operatori E_k. Un elemento $\psi \in \mathcal{H}$ è determinato dalle sue *componenti* $\psi_k = E_k\psi \in \mathcal{H}_k$, che definiscono una funzione dell'indice discreto k a valori negli spazi $\mathcal{H}_k$. La norma si può scrivere

$$\|\psi\|^2 = \sum_k \|\psi_k\|^2 \tag{1.49}$$

e l'azione dell'operatore F sul vettore ψ prende la forma *diagonale*

$$[F\psi]_k = f_k \psi_k. \tag{1.50}$$

Vogliamo ora estendere questo procedimento al caso in cui l'operatore autoaggiunto F ha uno spettro qualunque o al caso ancora più generale di un'algebra C^* commutativa $\mathcal{A}$ di operatori che si possono esprimere per mezzo della rappresentazione spettrale (1.44). A tale scopo dobbiamo introdurre il concetto di *integrale diretto* di spazi di Hilbert [15–17].

Indichiamo con μ una misura positiva sullo spazio localmente compatto S e supponiamo che per ogni punto $k \in S$ sia dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}(k)$. L'integrale diretto

$$\mathcal{H} = \int_S^{\oplus} \mathcal{H}(k)\, d\mu(k) \tag{1.51}$$

è uno spazio di Hilbert i cui elementi ψ sono definiti da funzioni del tipo $k \to \psi(k) \in \mathcal{H}(k)$ tali che

$$\|\psi\|^2 = \int_S \|\psi(k)\|^2\, d\mu(k) < \infty. \tag{1.52}$$

Si noti che questa equazione generalizza la (1.49). Le funzioni che differiscono su di un insieme di misura nulla si consideramo equivalenti ed è sottinteso che tutti gli enunciati che le riguardano valgono a meno di un insieme di misura nulla. Si usa la notazione

$$\psi = \int_S^{\oplus} \psi(k)\, d\mu(k) \tag{1.53}$$

ed il prodotto scalare è dato da

$$(\psi, \psi') = \int_S (\psi(k), \psi'(k))\, d\mu(k). \tag{1.54}$$

Abbiamo omesso tutti i dettagli tecnici che assicurano l'esistenza di questi integrali [15–17]. Si dimostra che lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è separabile se gli spazi $\mathcal{H}(k)$ sono separabili ed S è localmente compatto ed ha una base numerabile di insiemi aperti. Esistono delle condizioni meno restrittive, ma quella indicata è sufficiente per i nostri scopi.

Ricordiamo che una misura μ' si dice *assolutamente continua* rispetto a μ se gli insiemi di misura nulla rispetto a μ hanno misura nulla anche rispetto a μ'. In tal caso esiste una funzione misurabile $d\mu'(k)/d\mu(k)$ detta derivata di Radon-Nicodym [15], tale che

$$\int_S f(k)\, d\mu'(k) = \int_S f(k) \frac{d\mu'(k)}{d\mu(k)}\, d\mu(k). \tag{1.55}$$

Due misure si dicono *equivalenti* se sono assolutamente continue l'una rispetto all'altra, cioè se hanno gli stessi insiemi di misura nulla. Si vede che le formule (1.52) ed (1.54) restano invariate se si sostituisce la misura μ con la misura equivalente μ' e $\psi(k)$ con

$$\psi'(k) = \left[\frac{d\mu(k)}{d\mu'(k)}\right]^{1/2} \psi(k). \tag{1.56}$$

Possiamo dunque affermare che nella costruzione dell'integrale diretto non è essenziale la scelta della misura μ, ma solo la sua classe di equivalenza. Anche la topologia di S non è essenziale ed insiemi di misura nulla rispetto a μ possono essere aggiunti o tolti ad S senza modificare lo spazio $\mathcal{H}$.

Un operatore F della forma

$$[F\psi](k) = f(k)\psi(k), \tag{1.57}$$

dove $f(k)$ è una funzione boreliana complessa limitata, è chiamato *diagonalizzabile* o *diagonale*. Si noti che gli operatori diagonali formano un'algebra commutativa. Particolari operatori diagonali sono gli operatori di proiezione $E(I)$ definiti da

$$[E(I)\psi](k) = f_I(k)\psi(k), \tag{1.58}$$

dove f_I è la funzione caratteristica dell'insieme boreliano I. Essi formano una misura spettrale su S e gli operatori diagonali (1.57) hanno la rappresentazione spettrale (1.44).

Vogliamo ora mostrare il risultato inverso [15–17]. Ci limitiamo a considerare spazi di Hilbert separabili, che sono sufficienti per le applicazioni alla meccanica quantistica.

Teorema 3 *Data una misura spettrale E sullo spazio localmente compatto S, si può costruire una decomposizione dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ in integrale diretto su S in modo che gli operatori che hanno la rappresentazione spettrale* (1.44) *si possano rappresentare nella forma diagonale* (1.57).

Ovviamente, μ deve avere gli stessi insiemi di misura nulla della misura spettrale E.

Indichiamo ancora con $\mathcal{A}$ l'algebra C^* composta dagli operatori (1.44) con f continua. Consideriamo un vettore $\psi_1 \in \mathcal{H}$ ed indichiamo con $\mathcal{H}_1$ la chiusura del sottospazio $\mathcal{A}\psi_1$. Se $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ si dice che il vettore ψ_1 è *ciclico*, ma questo non avviene nel caso generale. Introduciamo la misura positiva

$$\mu_1(I) = (\psi_1, E(I)\psi_1) \tag{1.59}$$

e se

$$\psi' = F(f')\psi_1, \tag{1.60}$$

poniamo

$$\psi_1'(k) = f'(k)\left[\frac{d\mu_1(k)}{d\mu(k)}\right]^{1/2}. \tag{1.61}$$

Se $S_1 \subset S$ è il supporto delle misura μ_1, questa funzione si annulla fuori di S_1. Se assumiamo analoghe formule per $\psi'' \in \mathcal{A}\psi_1$, dalla rappresentazione spettrale (1.44) si ha

$$(\psi', F(f)\psi'') = (\psi_1, F(\overline{f}' f f'')\psi_1) = \int_S \overline{\psi}_1'(k) f(k) \psi_1''(k)\, d\mu(k), \tag{1.62}$$

in particolare

$$\|\psi'\|^2 = \int_S |\psi_1'(k)|^2\, d\mu(k). \tag{1.63}$$

Questi risultati permettono di costruire un isomorfismo tra $\mathcal{H}_1$ e lo spazio delle funzioni su S_1 al quadrato sommabili rispetto a μ, in modo che all'operatore $F(f)$ corrisponda la moltiplicazione per $f(k)$.

Se ψ_1 non è ciclico, scegliamo un altro vettore ψ_2 ortogonale ad $\mathcal{H}_1$ e consideriamo la chiusura $\mathcal{H}_2$ del sottospazio $\mathcal{A}\psi_2$. Si vede immediatamente che i sottospazi $\mathcal{H}_1$ ed $\mathcal{H}_2$ sono ortogonali. Procedendo in questo modo si ottiene una decomposizione di $\mathcal{H}$ in somma diretta

$$\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n \tag{1.64}$$

con al più una infinità numerabile di termini, dato che supponiamo $\mathcal{H}$ separabile. Ogni vettore $\psi \in \mathcal{H}$ è una somma di vettori appartenenti ai sottospazi ortogonali $\mathcal{H}_n$ e si possono introdurre, procedendo come sopra, le funzioni $\psi_n(k)$ nulle fuori dei sottoinsiemi $S_n \subset S$, in modo che

$$\|\psi\|^2 = \int_S \sum_n |\psi_n(k)|^2 \, d\mu(k). \tag{1.65}$$

Se $k \in S$ indichiamo con $d(k)$ il numero di sottoinsiemi S_n a cui k appartiene. I numeri $\psi_n(k)$ sono le componenti di un vettore $\psi(k)$ appartenente ad uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}(k)$ con dimensione $d(k)$. Con questa notazione abbiamo

$$(\psi', F\psi'') = \int_S (\psi'(k), f(k)\psi''(k)) \, d\mu(k). \tag{1.66}$$

Ponendo $F = 1$ si ottiene la (1.54) e, scegliendo $\psi'(k)$ in modo arbitrario, si ottiene la (1.57).

In conclusione, siamo riusciti a rappresentare i vettori di $\mathcal{H}$ per mezzo delle funzioni $k \to \psi(k) \in \mathcal{H}(k)$, che fisicamente si interpretano come funzioni d'onda in una rappresentazione in cui gli operatori del tipo (1.44) sono diagonali. Il fatto che le funzioni $\psi(k)$ prendono valori in spazi di Hilbert che possono avere dimensione maggiore di uno significa che si possono avere funzioni d'onda a più componenti (come quando si descrivono particelle con spin). In tal caso, gli operatori (1.44) non descrivono completamente lo stato del sistema.

In un integrale diretto di spazi di Hilbert, un operatore Q del tipo

$$[Q\psi](k) = Q(k)\psi(k), \tag{1.67}$$

dove $Q(k)$ sono operatori in $\mathcal{H}(k)$, si chiama *decomponibile* e si scrive

$$Q = \int_S^{\oplus} Q(k) \, d\mu(k). \tag{1.68}$$

Si vede subito che gli operatori decomponibili commutano con gli operatori diagonali. È anche vero che [15–17]

Teorema 4 *Un operatore che commuta con tutti gli operatori diagonali con $f(k)$ continua (cioè un operatore che appartiene ad $\mathcal{A}'$) è decomponibile.*

Poniamo

$$\psi = \int_S^{\oplus} \psi(k) \, d\mu(k), \tag{1.69}$$

$$Q\psi = \int_S^{\oplus} \phi(k)\, d\mu(k), \tag{1.70}$$

$$Q\psi_n = \int_S^{\oplus} \eta_n(k)\, d\mu(k), \tag{1.71}$$

dove i vettori ψ_n sono quelli introdotti nella dimostrazione del teorema precedente. Indichiamo con $\psi_m(k), \phi_m(k), \eta_{mn}(k)$ le componenti dei vettori $\psi(k), \phi(k), \eta_n(k) \in \mathcal{H}(k)$, rispetto alla base introdotta nella stessa dimostrazione.

Consideriamo dapprima vettori del tipo

$$\psi = \sum_n F(f_n)\psi_n, \qquad \psi_n(k) = f_n(k)\left[\frac{d\mu_n(k)}{d\mu(k)}\right]^{1/2}, \tag{1.72}$$

dove solo un numero finito delle funzioni f_n non sono nulle. Questi vettori formano un sottospazio denso in $\mathcal{H}$. Si ha

$$Q\psi = \sum_n F(f_n) Q\psi_n = \int_S^{\oplus} \sum_n f_n(k)\eta_n(k)\, d\mu(k), \tag{1.73}$$

e dunque

$$\phi_m(k) = \sum_n f_n(k)\eta_{mn}(k) = \sum_n \left[\frac{d\mu_n(k)}{d\mu(k)}\right]^{-1/2} \eta_{mn}(k)\psi_n(k). \tag{1.74}$$

Questa formula definisce un operatore lineare

$$\phi(k) = Q(k)\psi(k) \tag{1.75}$$

e si vede facilmente che

$$\|Q(k)\| \leq \|Q\|. \tag{1.76}$$

Pertanto il risultato si può estendere per continuità a qualunque $\psi \in \mathcal{H}$.

In conclusione, abbiamo visto che, data una algebra C^* commutativa di operatori $\mathcal{A}$, si può rappresentare lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ come un integrale diretto sullo spettro S in modo che gli elementi di $\mathcal{A}$ sono operatori diagonali definiti da funzioni continue, gli elementi dell'algebra di von Neumann $\mathcal{A}'$ sono gli operatori decomponibili e gli elementi di $\mathcal{A}''$ sono gli operatori diagonali definiti da funzioni di Borel limitate.

1.4 Formulazione algebrica della meccanica quantistica.

Abbiamo visto che in una teoria classica la struttura dell'algebra C^* (commutativa) delle osservabili, considerata come un'algebra astratta, determina una compattizzazione S dello spazio delle fasi Γ e la rappresentazione delle osservabili come funzioni continue su S. Ci chiediamo fino a che punto in una teoria quantistica la struttura dell'algebra C^* astratta non commutativa $\mathcal{A}$ determina gli operatori che rappresentano le osservabili.

Questi operatori formano una *rappresentazione simmetrica continua* $x \to \pi(x)$ di $\mathcal{A}$ nello spazio degli operatori limitati su $\mathcal{H}$, cioè π è lineare e si ha

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \qquad \pi(x^*) = (\pi(x))^*, \qquad \|\pi(x)\| \leq \|x\|. \tag{1.77}$$

Due rappresentazioni π e π', che operano rispettivamente sugli spazi di Hilbert $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{H}'$, sono *equivalenti* se esiste un isomorfismo U di $\mathcal{H}$ su $\mathcal{H}'$ (cioè una applicazione lineare invertibile che preserva il prodotto scalare) tale che

$$\pi(A) = U^{-1}\pi'(A)U. \tag{1.78}$$

Un sottospazio (chiuso) $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ si dice *invariante* se tutti gli operatori $\pi(x)$ lo trasformano in se stesso. Poichè la rappresentazione è simmetrica, si ha

$$(\phi, \pi(x)\psi) = (\pi(x^*)\phi, \psi) \tag{1.79}$$

e segue che il sottospazio $\mathcal{H}''$ ortogonale ad $\mathcal{H}'$ è pure invariante. In questo caso la rappresentazione π si spezza nella *somma diretta* di due rappresentazioni e si scrive

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'', \qquad \pi = \pi' \oplus \pi''. \tag{1.80}$$

Se non esistono sottospazi invarianti diversi da $\mathcal{H}$ e da $\{0\}$, di dice che la rappresentazione π è *irriducibile*. La teoria della decomposizione di rappresentazioni non irriducibili in somma o integrale diretto di rappresentazioni più semplici è del tutto analoga a quella descritta nella sezione 3.1 riguardo alle rappresentazioni unitarie continue di gruppi.

Vedremo nella sezione 3.4 che in un sistema con finiti gradi di libertà, l'algebra C^* che deriva dalle relazioni di commutazione canoniche ha una sola classe di equivalenza di rappresentazioni irriducibli. In questo caso l'algebra astratta contiene le stesse informazioni fisiche dell'algebra di operatori che la rappresenta. In teorie più complesse, l'algebra astratta $\mathcal{A}$ ha più rappresentazioni irriducibili inequivalenti e si pone il problema di determinare il loro significato fisico. Abbiamo già visto che i sottospazi coerenti (distinti da regole di superselezione) sono trasformati in se stessi dagli operatori che rappresentano le osservabili. Essi sono dunque sottospazi invarianti e su di essi operano rapresentazioni di $\mathcal{A}$ irriducibili (altrimenti ci sarebbero ulteriori regole di selezione) tra di loro non equivalenti (altrimenti i settori sarebbero fisicamente indistinguibili). In queste teorie, comunemente accettate, la rappresentazione che interessa fisicamente è dunque una somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Da un punto di vista matematico esistono tuttavia rappresentazioni di tipo più complicato. È in ogni caso utile esprimere il maggior numero possibile di informazioni fisiche in termini delle proprietà dell'algebra astratta $\mathcal{A}$ [19–21], ed occuparsi in un secondo tempo del significato fisico delle sue rappresentazioni.

Per proseguire questa analisi è necessario approfondire il concetto di stato. Data una rappresentazione π ed uno stato rappresentato dal vettore normalizzato $\psi \in \mathcal{H}$, abbiamo visto che il valor medio di una osservabile rappresentata da un elemento hermitiano $x \in \mathcal{A}$ è dato da

$$\rho(x) = (\psi, \pi(x), \psi). \tag{1.81}$$

Se invece si considera uno stato misto rappresentato da un operatore densità D con $\mathrm{Tr}D = 1$, il valore medio si scrive

$$\rho(x) = \mathrm{Tr}(\pi(x)D). \tag{1.82}$$

In entrambi i casi, il funzionale $x \to \rho(x)$ è lineare ed ha le proprietà

$$\rho(x^*x) \geq 0, \qquad \rho(e) = 1, \tag{1.83}$$

cioè è positivo e normalizzato. La diseguaglianza

$$|\rho(x^*y)|^2 \leq \rho(x^*x)\rho(y^*y) \tag{1.84}$$

si dimostra come la diseguaglianza di Schwarz. Ne segue che

$$(\rho((x+y)^*(x+y))^{1/2} \leq (\rho(x^*x))^{1/2} + (\rho(y^*y))^{1/2} \tag{1.85}$$

e che l'insieme $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ in cui $\rho(x^*x) = 0$ è uno spazio vettoriale. Segue anche la diseguaglianza

$$(\rho((xy)^*xy))^2 \leq \rho(z^*z)\rho(y^*y), \qquad z = x^*xy, \tag{1.86}$$

che implica la relazione $\mathcal{A}\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. In altre parole, $\mathcal{I}$ è un ideale sinistro dell'algebra $\mathcal{A}$.

Dato un funzionale lineare positivo normalizzato, si può sempre scriverlo nella forma (1.81) dove π è una rappresentazione costruita con un procedimento dovuto a Gelfand, Naimark e Segal (GNS) [15, 18]. Consideriamo lo spazio vettoriale quoziente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ e definiamo su di esso il prodotto scalare

$$(\phi, \psi) = \rho(x^* y), \qquad x \in \phi, \quad y \in \psi, \qquad \phi, \psi \in \mathcal{A}/\mathcal{I}. \tag{1.87}$$

Esso non dipende dalla scelta degli elementi x, y. Indichiamo con $\mathcal{H}$ il completamento di $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ rispetto alla norma $\|\psi\| = (\psi, \psi)^{1/2}$.

Una rappresentazione lineare dell'algebra $\mathcal{A}$, che agisce sullo spazio vettoriale $\mathcal{A}$, è la *rappresentazione regolare sinistra* definita da $L(x)y = xy$. Dato che $\mathcal{I}$ è un ideale sinistro, e dunque un sottospazio invariante rispetto ad L, se $y' - y \in \mathcal{I}$, si ha $L(x)y' - L(x)y \in \mathcal{I}$. Dunque l'operatore $L(x)$ definisce per passaggio al quoziente un operatore $\pi(x)$ che agisce su $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Si vede facilmente che $x \to \pi(x)$ è una rappresentazione simmetrica di $\mathcal{A}$. Se ψ_0 è la classe di equivalenza che contiene l'unità e, si ha

$$(\psi_0, \pi(x)\psi_0) = \rho(e^* x e) = \rho(x), \qquad e \in \psi_0, \tag{1.88}$$

in accordo con la (1.81).

Finora non abbiamo usato il fatto che $\mathcal{A}$ è un'algebra C^* ed abbiamo ottenuto una rappresentazione per mezzo di operatori $\pi(x)$ non necessariamente limitati definiti su di un sottospazio lineare denso di $\mathcal{H}$. Questa è la situazione che si trova in teoria dei campi quando si costruiscono gli operatori di campo a partire dai valori di aspettazione nel vuoto [22, 23]. Se $\mathcal{A}$ è un'algebra C^*, si ottiene un risultato più completo.

Consideriamo un elemento x ed un numero c con $c > \|x\|^2$. Lo sviluppo in serie di Taylor di $(e - c^{-1}x^*x)^{1/2}$ converge in norma verso un elemento hermitiano y e dunque si ha $e - c^{-1}x^*x = y^*y$. Se ρ è un funzionale lineare positivo non necessariamente normalizzato, si ha $\rho(x^*x) \leq c\rho(e)$ e dunque, nel limite $c \to \|x\|^2$, $\quad \rho(x^*x) \leq \|x\|^2 \rho(e)$. Siccome $|\rho(x)|^2 = |\rho(e^*x)|^2 \leq \rho(e)\rho(x^*x)$, si ha

$$|\rho(x)| \leq \rho(e)\|x\|. \tag{1.89}$$

Anche $\rho(y^*xy)$ è un funzionale lineare positivo della variabile x e dunque si può scrivere

$$|\rho(y^*xy)| \leq \rho(y^*y)\|x\|. \tag{1.90}$$

Se $y \in \psi$, abbiamo

$$\|\pi(x)\psi\|^2 = (\pi(x)\psi, \pi(x)\psi) = \rho((xy)^* xy) \leq$$
$$\leq \|x^* x\| \rho(y^* y) = \|x\|^2 \|\psi\|^2. \tag{1.91}$$

Pertanto otteniamo

$$\|\pi(x)\| \leq \|x\|. \tag{1.92}$$

Gli operatori $\pi(x)$ sono limitati e si possono estendere per continuità a tutto lo spazio $\mathcal{H}$.

Riassumendo, abbiamo [15, 18]

Teorema 5 *Data un'algebra C^* $\mathcal{A}$, per ogni funzionale positivo normalizzato ρ, la costruzione di GNS sopra descritta fornisce una rappresentazione simmetrica continua π con un vettore ciclico ψ_0, tale che ρ è dato dalla* (1.88). *Se π' è un'altra rappresentazione di $\mathcal{A}$ con un vettore ciclico ψ_0' e si ha*

$$(\psi_0', \pi'(x), \psi_0') = \rho(x), \tag{1.93}$$

le rappresentazioni π e π' sono equivalenti.

Lo studio delle rappresentazioni di un'algebra C^* è dunque ridotto allo studio, più semplice, dei suoi funzionali lineari positivi. Con questa tecnica si dimostra che ogni algebra C^* è isomorfa (anche per quanto riguarda la norma e l'involuzione) ad una algebra C^* di operatori. Dunque una teoria basata su di un'algebra C^* si può anche formulare in termini di operatori in uno spazio di Hilbert. È però utile separare gli aspetti algebrici della teoria, che riguardano le relazioni algebriche tra le osservabili, dai problemi riguardanti la scelta degli stati fisici.

Si vede facilmente che l'insieme dei funzionali lineari positivi normalizzati è un insieme convesso e compatto nello spazio vettoriale duale di $\mathcal{A}$ munito della topologia debole. Chiamiamo *estremo* un funzionale che non può essere rappresentato nella forma

$$\rho = c\rho' + (1-c)\rho'', \qquad 0 < c < 1. \tag{1.94}$$

dove ρ' e ρ'' sono due funzionali lineari positivi normalizzati diversi. Si dimostra [15, 18] che la rappresentazione π costruita a partire dal funzionale ρ è irriducibile se e solo se ρ è estremo. Dal punto di vista fisico i funzionali estremi rappresentano stati puri.

1.5 Tests ed operazioni.

In questa sezione discutiamo con maggior dettaglio la descrizione delle osservabili in meccanica quantistica. Abbiamo visto nella sezione 1.2 che gli errori sperimentali stanno alla base dei concetti topologici presenti nelle teorie fisiche. È dunque naturale introdurre la descrizione di questi errori direttamente nel formalismo matematico. Consideriamo per semplicità solo osservabili con due possibili risultati $0, 1$, dette "tests" [13], "questions" [24], "propositions" [25], oppure "effects" [26, 27]. Si può osservare a questo proposito che uno strumento di misura realistico dà un numero finito di possibili risultati.

Secondo il formalismo descritto nella sezione 1.1, in fisica classica i *tests* sono descritti, da funzioni caratteristiche di insiemi di Borel nello spazio delle fasi Γ, che assumono i valori 0, 1. Questi sono però *tests puri* che non tengono conto di errori sperimentali. Infatti essi non determinano la topologia di Γ. In fisica classica un test realistico è descritto da una funzione continua su Γ con valori compresi nel nel segmento $[0, 1]$. Dato uno stato descritto da un punto di Γ, la funzione fornisce la probabilità che il risultato della misura sia 1. Questa funzione è un elemento hermitiano (di tipo particolare) dell'algebra C^* commutativa introdotta nella sezione 1.2, ma la sua interpretazione fisica è diversa. Si noti che in generale i tests puri, rappresentati da funzioni discontinue, non corrispondono ad alcun elemento dell'algebra C^*.

Analogamente, in fisica quantistica i tests puri sono rappresentati da operatori di proiezione, che hanno gli autovalori 0, 1. I tests realistici sono rappresentati da operatori positivi con norma non maggiore di 1, il cui spettro è contenuto nel segmento $[0, 1]$. Dato uno stato rappresentato da un operatore densità D, la probabilità che il test descritto dall'operatore A dia il risultato 1 è data da Tr(AD). Gli operatori che descrivono test realistici sono elementi dell'algebra C^* $\mathcal{A}$ introdotta nella sezione 1.2, ma questa algebra può non contenere operatori di proiezione non banali.

Se A e B sono operatori (o, nel caso classico, funzioni) che rappresentano tests, anche

$$cA + (1 - c)B, \qquad 0 \leq c \leq 1 \tag{1.95}$$

rappresenta un test, definito operativamente nel seguente modo. Si estrae a caso con probabilità uniforme un numero $0 \leq x \leq 1$; se $x < c$ si esegue il test A, altrimenti il test B. Si vede che i tests, come gli stati, formano un insieme convesso. Si capisce anche come i tests non puri possano descrivere delle perturbazioni aleatorie dovute agli errori sperimentali.

Si possono anche considerare osservabili generalizzate con più di due possibili risultati. Indichiamo con S l'insieme dei possibili risultati, che può essere un sottoinsieme della retta reale oppure anche uno spazio topologico di tipo più generale. Per ogni sottoinsieme boreliano $I \subset S$ si definisce un test $\tau(I)$, che è rappresentato da un operatore positivo con norma minore o eguale a uno. Ovviamente si ha

$$\tau(\emptyset) = 0, \qquad \tau(\bigcup_n I_n) = \sum_n \tau(I_n), \tag{1.96}$$

dove $\{I_n\}$ è una famiglia numerabile di insiemi boreliani disgiunti. Si dice che τ è una misura a valori operatoriali positivi (POVM = positive-operator-valued measure) [28–31]. Se

$$\tau(S) = 1, \tag{1.97}$$

si dice che la POVM è normalizzata. Le POVM non normalizzate descrivono situazioni in cui un procedimento di misura può non dare alcun risultato. Una misura spettrale è una POVM normalizzata in cui tutti gli operatori $\tau(I)$ sono proiettori.

Consideriamo ora un problema finora trascurato, cioè in quale stato si trova il sistema dopo la misura di un'osservabile che ha dato un certo risultato. Nel caso in cui lo stato (puro) iniziale sia rappresentato dal vettore ψ e l'osservabile sia un test puro rappresentato dall'operatore di proiezione P, spesso si assume che se il test ha dato risultato 1, dopo la misura lo stato è descritto dal vettore $\|P\psi\|^{-1}P\psi$. Vedremo che questa ipotesi è, in generale, ingiustificata, in quanto lo stato del sistema dopo la misura dipende dal particolare strumento di misura usato. È pertanto necessario introdurre il concetto di *operazione* [20, 29, 32–34], che descrive sia la probabilità di ottenere il risultato 1, che lo stato del sistema dopo una misura che ha dato quel risultato. È chiaro che ad ogni operazione corrisponde un test, ma lo stesso test può provenire da operazioni diverse.

Un tipo particolare di operazioni, che chiameremo *pure* (di prima specie, seguendo la terminologia di [32]), si possono descrivere per mezzo di operatori, non necessariamente hermitiani, con norma minore o eguale ad 1. Se A è l'operatore che descrive l'operazione, il corispondente test è descritto dall'operatore A^*A, in modo che la probabilità di ottenere il risultato 1 operando su di uno stato puro definito dal vettore normalizzato ψ è data da $\|A\psi\|^2$. Dopo la misura con risultato 1, il sistema si trova nello stato puro $\|A\psi\|^{-1}A\psi$. Se si parte da uno stato descritto da un operatore densità D, la probabilità di ottenere il risultato 1 è $\mathrm{Tr}D'$, dove $D' = ADA^*$, e lo stato dopo la misura è descritto dall'operatore densità $(\mathrm{Tr}D')^{-1}D'$.

Se A e B sono operatori che rappresentano operazioni pure, l'operatore BA rappresenta l'operazione pura ottenuta eseguendo successivamente le operazioni A e B e definendo il risultato come il prodotto dei due risultati. Le operazioni pure permettono di dare una interpretazione fisica ad alcuni operatori non hermitiani dell'algebra $\mathcal{A}$ ed anche del loro prodotto. Non è però ragionevole sostenere che tutte le operazioni realistiche siano pure.

Per affrontare questo problema è necessario introdurre una descrizione quantistica dello strumento di misura. Indichiamo con $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{H}^S$ gli spazi di Hilbert che descrivono il sistema studiato e lo strumento. Il sistema composto sarà descritto dal prodotto tensoriale $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^S$ [16, 35]. Esso contiene vettori del tipo $\psi \otimes \psi^S$ (che descrivono stati puri privi di correlazioni tra i due sistemi) e limiti di combinazioni lineari di vettori di questo tipo (che descrivono stati puri correlati). Il prodotto tensoriale di due operatori è definito da

$$(A \otimes A^S)(\psi \otimes \psi^S) = (A\psi) \otimes (A^S\psi^S) \tag{1.98}$$

e si prolunga per linearità e continuità a tutto lo spazio $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^S$.

Inizialmente il sistema e lo strumento sono in uno stato scorrelato descritto da un operatore densità del tipo $D \otimes D^S$ ed essi interagiscono tra di loro per un certo tempo. L'effetto dell'interazione è descritto da un operatore unitario U che opera su $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^S$. Se indichiamo con P e P^S due tests puri eseguiti rispettivamente sul sistema e sullo strumento dopo la loro interazione, la probabilità che entrambi diano risultato 1 è data da

$$\mathcal{P} = \mathrm{Tr}((P \otimes P^S)U(D \otimes D^S)U^*). \tag{1.99}$$

Se introduciamo in $\mathcal{H}^S$ una base $\{\psi_k^S\}$ formata da autovettori di D^S con autovalori p_k ed una base $\{\phi_i^S\}$ nel sottospazio $P^S\mathcal{H}^S$, si può scrivere

$$\mathcal{P} = \mathrm{Tr}(PD'), \tag{1.100}$$

dove

$$D' = \sum_{ik} p_k U_{ik} D U_{ik}^*, \tag{1.101}$$

e gli operatori U_{ik}, che operano in $\mathcal{H}$, sono definiti da

$$((\phi \otimes \phi_i^S), U(\psi \otimes \psi_k^S)) = (\phi, U_{ik}\psi). \tag{1.102}$$

Ponendo $P = 1$, si vede che $\mathrm{Tr}D'$ è la probabilità che la misura eseguita sullo strumento dia il risultato 1 e $(\mathrm{Tr}D')^{-1}D'$ è l'operatore densità che descrive lo stato del sistema dopo la misura.

Si vede che la relazione (1.101) tra D e D' è una generalizzazione di quella data precedentemente per le operazioni pure. Anche nel caso generale si richiede che gli operatori U_{ik} appartengono all'algebra $\mathcal{A}$. In questo modo si limitano le possibili interazioni del sistema con gli strumenti di misura.

Nel formalismo algebrico astratto, se lo stato di partenza è descritto dal funzionale positivo normalizzato ρ, e si esegue l'operazione pura descritta dall'elemento $x \in \mathcal{A}$, la probabilità di ottenere il risultato 1 è $\rho(x^*x)$ e lo stato dopo la misura è descritto dal funzionale

$$y \to (\rho'(e))^{-1}\rho'(y), \qquad \rho'(y) = \rho(x^*yx). \tag{1.103}$$