Introduzione a
GRUPPI ED ALGEBRE
IN MECCANICA QUANTISTICA.

M. Toller

1999

Capitolo 2

Simmetrie in Meccanica Quantistica.

2.1 Operazioni di simmetria.

Due osservatori aventi posizione, orientamento o velocità diverse descrivono lo stato di un sistema in modo diverso, cioè gli assegnano due diversi raggi $\hat{\psi}$ e $\hat{\psi}'$. Date le caratteristiche relative dei due osservatori, esiste una applicazione $\hat{U}$ dello spazio dei raggi su se stesso tale che

$$\hat{\psi}' = \hat{U}\hat{\psi}. \tag{2.1}$$

Si dice che $\hat{U}$ rappresenta una *operazione di simmetria*.

Siccome le probabilità di transizione sono le stesse per i due osservatori, si deve avere

$$\hat{U}\hat{\phi} \cdot \hat{U}\hat{\psi} = \hat{\phi} \cdot \hat{\psi} \tag{2.2}$$

e dunque anche

$$d(\hat{U}\hat{\phi}, \hat{U}\hat{\psi}) = d(\hat{\phi}, \hat{\psi}). \tag{2.3}$$

L'operatore $\hat{U}$ è dunque isometrico ed ha un inverso $\hat{U}^{-1}$.

Abbiamo considerato l'interpretazione *passiva* delle simmetrie spazio-temporali, cioè il cambiamento nella descrizione dello stato è attribuito al cambiamento dell'osservatore. Le stesse trasformazioni hanno anche una interpretazione *attiva*, cioè l'osservatore resta lo stesso, ma si ha un reale cambiamento dello stato del sistema. Naturalmente, se si opera sia la trasformazione passiva che quella attiva, la descrizione dello stato del sistema resta invariata.

Questa possibilità di compensazione caratterizza le operazioni di simmetria spazio-temporali. Esistono anche operazioni di simmetria *interne*, che non hanno carattere spazio-temporale ed hanno solo una interpretazione attiva. Per esempio, la coniugazione di carica, che consiste nella sostituzione di ogni particella con la corrispondente antiparticella.

Notiamo che una operazione di simmetria $\hat{U}$ applica un settore $\hat{\mathcal{H}}$ su di un settore $\hat{\mathcal{H}}'$ che può essere eguale o diverso da $\hat{\mathcal{H}}$. Infatti, se $\hat{\phi}, \hat{\psi} \in \hat{\mathcal{H}}$ e $\hat{\phi} \cdot \hat{\psi} > 0$, segue dalla (2.2) che $\hat{U}\hat{\phi}, \hat{U}\hat{\psi}$ hanno probabilità di transizione non nulla e dunque appartengono allo stesso settore. Se $\hat{\phi} \cdot \hat{\psi} = 0$, si può trovare un terzo raggio $\hat{\chi} \in \hat{\mathcal{H}}$ tale che $\hat{\chi} \cdot \hat{\phi} > 0$, $\hat{\chi} \cdot \hat{\psi} > 0$, e ragionare come nel caso precedente.

Indichiamo con $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ gli spazi di Hilbert corrispondenti ai settori $\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{H}}'$ e consideriamo un operatore $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ invertibile, isometrico e lineare oppure antilineare. Si ha dunque

$$U(a\phi + b\psi) = aU\phi + bU\psi, \qquad (U\phi, U\psi) = (\phi, \psi), \tag{2.4}$$

oppure

$$U(a\phi + b\psi) = \overline{a}U\phi + \overline{b}U\psi, \qquad (U\phi, U\psi) = (\psi, \phi) = \overline{(\phi, \psi)}. \tag{2.5}$$

Se $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$, U è ripettivamente *unitario* oppure *antiunitario*. Si vede facilmente che in entrambi i casi U trasforma un raggio di $\mathcal{H}$ in un raggio di $\mathcal{H}'$ e dunque definisce un operatore $\hat{U} : \hat{\mathcal{H}} \to \hat{\mathcal{H}}'$. Si vede anche che $\hat{U}$ soddisfa la condizione (2.2) ed è invertibile. Wigner [36, 37] ha mostrato che in questo modo si ottengono tutte le operazioni di simmetria, cioè:

Teorema 6 *Una applicazione invertibile $\hat{U} : \hat{\mathcal{H}} \to \hat{\mathcal{H}}'$ che soddisfa la condizione* (2.2) *si ottiene, per passaggio al quoziente, da un operatore $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ invertibile, isometrico e lineare oppure antilineare. U è determinato a meno di un fattore di fase, che può dipendere dal settore $\hat{\mathcal{H}}$.*

Per dimostrare il teorema, scegliamo per ogni $\psi \in \hat{\psi} \in \hat{\mathcal{H}}$ un vettore $\psi' \in \hat{\psi}' = \hat{U}\hat{\psi}$, con $\|\psi'\| = \|\psi\|$. Definiamo l'operatore U tale che $U\psi = \psi'$. Segue dalla eq. (2.2) che esso ha le proprietà

$$\|U\psi\| = \|\psi\|, \qquad |(U\psi, U\phi)| = |(\psi, \phi)|, \tag{2.6}$$

ma non è necessariamente lineare o antilineare. Dobbiamo determinare le fasi di tutti i vettori $\psi' = U\psi$ in modo da semplificare al massimo l'operatore U.

Se consideriamo una base ortonormale $\{\phi_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ in $\mathcal{H}$, i vettori $\phi'_n = U\phi_n$ formano una base ortonormale in $\mathcal{H}'$. Per ogni vettore

$$\psi = \sum_n c_n \phi_n \in \mathcal{H} \tag{2.7}$$

possimo porre

$$\psi' = U\psi = \sum_n c'_n \phi'_n. \tag{2.8}$$

Dalla condizione

$$|(\phi'_n, \psi')| = |(\phi_n, \psi)|, \tag{2.9}$$

si ottiene

$$|c'_n| = |c_n|. \tag{2.10}$$

Consideriamo dapprima dei casi particolari per poi ottenere la soluzione per ψ generico. Per $n > 0$ abbiamo

$$U(\phi_0 + \phi_n) = a\phi'_0 + b\phi'_n, \qquad |a| = |b| = 1. \tag{2.11}$$

Possiamo scegliere le fasi del primo membro e di ϕ'_n in modo che

$$U(\phi_0 + \phi_n) = \phi'_0 + \phi'_n. \tag{2.12}$$

In questo modo abbiamo fissato la fase di tutti i vettori ϕ'_n, a parte una fase arbitraria comune a tutti, che si interpreta come una fase arbitraria dell'operatore U.

Con una opportuna scelta della fase si ha

$$U(\phi_0 + \phi_m + \phi_n) = \phi'_0 + a\phi'_m + b\phi'_n, \qquad 0 < m < n, \qquad |a| = |b| = 1. \tag{2.13}$$

Dalla condizione

$$\begin{aligned} |1 + a| &= |(U(\phi_0 + \phi_m), U(\phi_0 + \phi_m + \phi_n))| = \\ &= |(\phi_0 + \phi_m, \phi_0 + \phi_m + \phi_n)| = 2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

segue che $a = 1$. Analogamente si ottiene $b = 1$ e dunque

$$U(\phi_0 + \phi_m + \phi_n) = \phi'_0 + \phi'_m + \phi'_n. \tag{2.15}$$

Sempre scegliendo la fase, si può porre

$$U(\phi_m + \phi_n) = \phi'_m + a\phi'_n, \qquad 0 < m < n, \qquad |a| = 1. \tag{2.16}$$

Dalla condizione

$$|1+a| = |(U(\phi_0+\phi_m+\phi_n), U(\phi_m+\phi_n))| =$$
$$= |(\phi_0+\phi_m+\phi_n, \phi_m+\phi_n)| = 2, \tag{2.17}$$

si ottiene $a = 1$ e dunque

$$U(\phi_m+\phi_n) = \phi'_m + \phi'_n, \qquad n \neq m. \tag{2.18}$$

Si è visto sopra che questa eguaglianza vale anche per $m = 0$.

Con una ulteriore scelta della fase possiamo scrivere

$$U(\phi_m+i\phi_n) = \phi'_m + i\epsilon_{mn}\phi'_n, \qquad |\epsilon_{mn}| = 1. \tag{2.19}$$

Dalla condizione

$$|1+i\epsilon_{mn}| = |(U(\phi_m+\phi_n), U(\phi_m+i\phi_n))| = |(\phi_m+\phi_n, \phi_m+i\phi_n)| = 2^{1/2}, \tag{2.20}$$

si ottiene $\epsilon_{mn} = \pm 1$. Vogliamo mostrare che questa quantità non dipende dagli indici m ed n.

Procedendo come nella derivazione della eq. (2.15) si ottiene

$$U(\phi_0+i\phi_m+\phi_n) = \phi'_0 + i\epsilon_{0m}\phi'_m + \phi'_n, \tag{2.21}$$

$$U(\phi_0+i\phi_m+i\phi_n) = \phi'_0 + i\epsilon_{0m}\phi'_m + i\epsilon_{0n}\phi'_n \tag{2.22}$$

e dalle relazioni

$$|\epsilon_{mn}-\epsilon_{0n}| = |(U(\phi_m+i\phi_n), U(\phi_0+i\phi_m+\phi_n))| =$$
$$= |(\phi_m+i\phi_n, \phi_0+i\phi_m+\phi_n)| = 0, \tag{2.23}$$
$$|\epsilon_{0m}+\epsilon_{0n}| = |(U(\phi_m+\phi_n), U(\phi_0+i\phi_m+i\phi_n))| =$$
$$= |(\phi_m+\phi_n, \phi_0+i\phi_m+i\phi_n)| = 2 \tag{2.24}$$

si ottiene $\epsilon_{mn} = \epsilon_{0n}$, $\epsilon_{0m} = \epsilon_{0n}$. In conclusione, si ha $\epsilon_{mn} = \epsilon = \pm 1$.

Consideriamo ora i generici vettori ψ e $U\psi$ dati dalle equazioni (2.7) e (2.8). Dalle condizioni

$$|c'_m + c'_n| = |(U(\phi_m+\phi_n), U\psi)| = |(\phi_m+\phi_n, \psi)| = |c_m + c_n|, \tag{2.25}$$

$$|c'_m - i\epsilon c'_n| = |(U(\phi_m + i\phi_n), U\psi)| = |(\phi_m + i\phi_n, \psi)| = |c_m - ic_n| \tag{2.26}$$

segue che

$$\Re(\overline{c}'_m c'_n) = \Re(\overline{c}_m c_n), \qquad \Im(\overline{c}'_m c'_n) = \epsilon\Im(\overline{c}_m c_n). \tag{2.27}$$

Se $c_m \neq 0$, abbiamo dunque

$$\begin{aligned} c'_n(c'_m)^{-1} &= c_n(c_m)^{-1}, \quad \text{per} \quad \epsilon = 1, \\ c'_n(c'_m)^{-1} &= \overline{c}_n(\overline{c}_m)^{-1}, \quad \text{per} \quad \epsilon = -1. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Scegliendo opportunamente la fase di $U\psi$, otteniamo infine

$$\begin{aligned} c'_n &= c_n, \quad \text{per} \quad \epsilon = 1, \\ c'_n &= \overline{c}_n \quad \text{per} \quad \epsilon = -1 \end{aligned} \tag{2.29}$$

e l'operatore U risulta essere lineare o antilineare, come volevasi dimostrare. Si noti che quest'ultimo risultato è in accordo con i vari risultati parziali ottenuti precedentemente.

Il carattere lineare o antilineare dell'operatore U dipende dalle proprietà dell'operazione di simmetria. Alcune operazioni di simmetria lasciano invariata l'evoluzione temporale, cioè lo stato trasformato $U\psi(t)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\frac{d(U\psi(t))}{dt} = HU\psi(t), \tag{2.30}$$

che si può scrivere nella forma

$$\pm i\frac{d\psi(t)}{dt} = U^{-1}HU\psi(t), \tag{2.31}$$

dove vale il segno $+$ se U è lineare ed il segno $-$ se U è antilineare. Ne segue

$$U^{-1}HU = \pm H \tag{2.32}$$

e dunque

$$(U\psi, HU\psi) = \pm(\psi, H\psi). \tag{2.33}$$

Se si suppone che l'operatore H sia limitato inferiormente ma non superiormente, il segno $-$ non è ammesso ed U deve essere lineare.

Altre operazioni di simmetria cambiano il segno del tempo, cioè $U\psi(-t)$ è una soluzione dell'equazione di Schroedinger, se $\psi(t)$ lo è. Un ragionamento analogo a quello sopra esposto mostra che in questo caso l'operatore U deve essere antilineare.

2.2 Gruppi di Simmetria.

Fino ad ora si sono considerate singole operazioni di simmetria. Siccome l'inverso ed il prodotto di operazioni di simmetria sono ancora operazioni di simmetria, è naturale considerare *gruppi di simmetria.* Se $\mathcal{G}$ è un gruppo di simmetria ed $r, s \in \mathcal{G}$, i corrispondenti operatori $\hat{U}(r), \hat{U}(s)$ nello spazio dei raggi hanno la proprietà

$$\hat{U}(r)\hat{U}(s) = \hat{U}(rs), \tag{2.34}$$

cioè $r \to \hat{U}(r)$ è una *rappresentazione proiettiva* (ray representation) [36, 38, 39] di $\mathcal{G}$. Supporremo che ad elementi diversi di $\mathcal{G}$ corrispondano operazioni di simmetria diverse, cioè che la rappresentazione proiettiva sia *fedele.*

Se $\mathcal{G}$ è un gruppo *topologico* [40, 41], è naturale considerare rappresentazioni *continue*, cioè richiedere che la probabilità di transizione $(\hat{\phi} \cdot \hat{U}(r)\hat{\psi})^2$ con $\hat{\phi}$ e $\hat{\psi}$ fissati sia funzione continua di r. Si vede facilmente che una condizione equivalente è richiedere che il raggio $\hat{U}(r)\hat{\psi}$ sia funzione continua di r per ogni $\hat{\psi}$ fissato; infatti si ha

$$\lim_{r \to s}(\hat{U}(r)\hat{\psi} \cdot \hat{U}(s)\hat{\psi}) = \lim_{r \to s}(\hat{\psi} \cdot \hat{U}(r^{-1}s)\hat{\psi}) = 1 \tag{2.35}$$

e dunque , usando l'espressione (1.2) per la distanza,

$$\lim_{r \to s} d(\hat{U}(r)\hat{\psi}, \hat{U}(s)\hat{\psi}) = 0. \tag{2.36}$$

Supporremo nel seguito che il gruppo $\mathcal{G}$ sia *connesso.* Dalla continuità segue che ogni settore è trasformato in se stesso e concentreremo la nostra attenzione su di un singolo settore. Supporremo inoltre che tutte le applicazioni $\hat{U}(r)$ siano generate da operatori unitari. Se $\mathcal{G}$ è connesso, basta assumere che gli elementi appartenenti ad un intorno dell'unità siano rappresentati da operatori unitari. Questo è certamente vero se $\mathcal{G}$ è un gruppo di Lie. Infatti in tal caso esiste un intorno dell'unità in cui ogni elemento appartiene ad un sottogruppo ad un parametro e dunque è il quadrato di un altro elemento. Basta allora osservare che il quadrato di un operatore unitario od antiunitario è sempre unitario.

Si ricordi che gli operatori $U(r)$ nello spazio di Hilbert sono determinati a meno di un fattore di fase. Scegliamo ora per ogni $r \in \mathcal{G}$ un particolare operatore unitario $U(r)$. In generale gli operatori $U(r)$ non formeranno una rappresentazione unitaria di $\mathcal{G}$, ma avremo

$$U(r)U(s) = \exp[-i\xi(r,s)]U(rs), \tag{2.37}$$

dove $\xi(r,s)$ è una funzione reale definita modulo 2π. Si dice che $\exp[-i\xi(r,s)] \in U(1)$ è un *moltiplicatore* del gruppo $\mathcal{G}$ e la funzione $\xi(r,s)$ è detta un *esponente*. Dalla proprietà associativa del gruppo segue immediatamente la condizione

$$\xi(s,t) - \xi(rs,t) + \xi(r,st) - \xi(r,s) = 0, \quad \mathrm{mod} 2\pi. \tag{2.38}$$

Se si opera un'altra scelta della fase degli operatori unitari, ponendo

$$U'(r) = \exp[-i\eta(r)]U(r), \tag{2.39}$$

si ha

$$U'(r)U'(s) = \exp[-i\xi'(r,s)]U'(rs), \tag{2.40}$$

dove il nuovo esponente è dato da

$$\xi'(r,s) = \xi(r,s) + \eta(s) - \eta(rs) + \eta(r), \quad \mathrm{mod} 2\pi. \tag{2.41}$$

Gli esponenti ξ e ξ' si dicono *equivalenti*. Se ξ è equivalente a zero, è possibile scegliere gli operatori $U'(r)$ in modo che formino una rappresentazione unitaria di $\mathcal{G}$. Questo non è però il caso generale.

Fino ad ora abbiamo trascurato gli aspetti topologici del problema, cioè il fatto che stiamo considerando rappresentazioni proiettive continue del gruppo topologico $\mathcal{G}$. Wigner ha mostrato [39, 43] che è possibile scegliere le fasi degli operatori $U(r)$ in modo che essi siano una funzione fortemente continua di r in un intorno I dell'unità $e \in \mathcal{G}$. Non è in generale possibile estendere questa proprietà di continuità a tutto il gruppo. Per ottenere questo risultato, scegliamo un vettore normalizzato $\phi_0 \in \mathcal{H}$ ed un intorno I dell'unità in cui $\hat{\phi}_0 \cdot \hat{U}(r)\hat{\phi}_0$ non si annulli. Per $r \in I$, fissiamo la fase di $U(r)$ in modo che il prodotto scalare $(\phi_0, U(r)\phi_0)$ sia reale positivo, cioè eguale a $\hat{\phi}_0 \cdot \hat{U}(r)\hat{\phi}_0$ e pertanto continuo. Si noti che con questa scelta si ha

$$U(r^{-1}) = U(r)^{-1}, \qquad U(e) = 1. \tag{2.42}$$

Dalla continuità della rappresentazione proiettiva, si ha

$$\lim_{r\to s} |(U(r)\psi, U(s)\psi)| = 1, \qquad \|\psi\| = 1, \tag{2.43}$$

$$\lim_{r\to s}|(\phi, U(r)\psi)| = |(\phi, U(s)\psi)|. \tag{2.44}$$

Dalla identità

$$\|U(s)\psi - (U(r)\psi, U(s)\psi)U(r)\psi\|^2 = 1 - |(U(r)\psi, U(s)\psi)|^2,$$

$$\|\psi\| = 1, \tag{2.45}$$

si ottiene

$$\lim_{r\to s}(U(r)\psi, U(s)\psi)U(r)\psi = U(s)\psi \tag{2.46}$$

e dunque

$$\lim_{r\to s}(U(r)\phi_0, U(s)\phi_0)(\phi_0, U(r)\phi_0) = (\phi_0, U(s)\phi_0). \tag{2.47}$$

Con la nostra scelta della fase si ha

$$\lim_{r\to s}(\phi_0, U(r)\phi_0) = (\phi_0, U(s)\phi_0) \tag{2.48}$$

e dunque

$$\lim_{r\to s}(U(r)\phi_0, U(s)\phi_0) = 1. \tag{2.49}$$

Questa equazione implica che $U(r)\phi_0$ è una funzione continua (sempre per $r \in I$) e lo stesso vale per $U(r)^{-1}\phi_0$ e dunque per $(\phi_0, U(r)\psi)$.

Usando ancora la (2.46), si ha

$$\lim_{r\to s}(U(r)\psi, U(s)\psi)(\phi_0, U(r)\psi) = (\phi_0, U(s)\psi) \tag{2.50}$$

e dunque

$$\lim_{r\to s}(U(r)\psi, U(s)\psi) = 1, \qquad \lim_{r\to s}\|U(r)\psi - U(s)\psi\| = 0. \tag{2.51}$$

Questa equazione significa che il vettore $U(r)\psi$ è una funzione continua di r per $r \in I$ e per ψ arbitrario, come si voleva dimostrare.

Dalla scelta $U(e) = 1$ segue che

$$\xi(r, e) = \xi(e, r) = 0, \quad \mathrm{mod} 2\pi \tag{2.52}$$

e dalla eguaglianza

$$(U(r)^{-1}\phi_0, U(s)\phi_0) = \exp(-i\xi(r, s))(\phi_0, U(rs)\phi_0), \tag{2.53}$$

segue che $\exp(-i\xi(r,s))$ è una funzione continua per $r, s, rs \in I$, ovvero per $r, s \in I'$, dove $I'I' \subset I$. Se l'intorno I' di e è sufficientemente piccolo, l'esponenziale varia in un intorno di 1 ed anche l'esponente $\xi(r,s)$ risulta continuo.

Consideriamo il caso in cui $\mathcal{G} = \mathbf{R}$, il gruppo additivo dei numeri reali. Una applicazione fisica importante riguarda l'evoluzione temporale di un sistema quantistico. In questo caso, $U(t)$, $t \in \mathbf{R}$, può essere reso continuo per ogni valore di t. Infatti, l'argomento precedente permette di costruire $U(t)$ continuo per $-a \leq t \leq a$ e basta porre

$$U(na+t) = U(a)^n U(t), \qquad U(-na-t) = U(-a)^n U(-t),$$
$$n = 1, 2, \ldots, \quad 0 \leq t \leq a. \tag{2.54}$$

Segue che l'esponente $\xi(r,s)$ può essere definito in modo da essere continuo per tutti i valori di s e di t.

Consideriamo l'espressione

$$\eta(r) = -\int_0^r du \int \xi(u,v) \frac{d\nu(v)}{dv}\, dv - \int \xi(r,v)\nu(v)\, dv, \tag{2.55}$$

doce ν è una funzione con derivata continua, con supporto compatto e normalizzata in modo che

$$\int \nu(v)\, dv = 1, \qquad \int \frac{d\nu(v)}{dv}\, dv = 0. \tag{2.56}$$

Sostituendola nella eq. (2.41) ed utilizzando la condizione (2.38) (che per continuità vale senza la specificazione $\bmod 2\pi$) si ottiene con qualche calcolo $\xi'(r,s) = 0$. Questo significa che è possibile scegliere la fase degli operatori $U(t)$ in modo che essi formino una rappresentazione unitaria continua di $\mathbf{R}$.

Il teorema di Stone [12] ci assicura che

$$U(t) = \exp(iHt), \tag{2.57}$$

dove H è un operatore autoaggiunto non necessariamente limitato. Abbiamo così giustificato il formalismo per l'evoluzione temporale esposto nella sezione 1.1. La differenza di segno è dovuta al fatto che stiamo considerando una interpretazione attiva delle traslazioni temporali, mentre l'operatore H introdotto nella sezione 1.1 è il generatore delle traslazioni temporali passive.

Si è pure posto $\hbar = 1$. Si noti che se si aggiunge all'operatore H una costante reale c, gli operatori $U(t)$ vengono modificati con un fattore di fase irrilevante $\exp(ict)$. Ne segue che, se non si impongono ulteriori condizioni, l'energia H è definita a meno di una costante additiva.

Per trattare il caso generale, consideriamo il gruppo $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ dei numeri reali mod2π, isomorfo al gruppo $U(1)$ dei fattori di fase. Indichiamo con $\mathcal{A}$ un suo sottogruppo al quale appartengono tutti gli esponenti $\xi(r,s)$ e definiamo un nuovo gruppo $\mathcal{E}$ composto dalle coppie (η, r) con $\eta \in \mathcal{A}$ ed $r \in \mathcal{G}$ con la legge di moltiplicazione

$$(\eta, r)(\chi, s) = (\eta + \chi + \xi(r,s), rs). \tag{2.58}$$

Si vede facilmente che la proprietà associativa è assicurata dalla condizione (2.38) e che gli operatori

$$U(\eta, r) = \exp(-i\eta)U(r) \tag{2.59}$$

formano una rappresentazione unitaria di $\mathcal{E}$. L'applicazione $(\eta, r) \to r$ è omomorfismo P di $\mathcal{E}$ su $\mathcal{G}$ il cui nucleo, composto dagli elementi del tipo (η, e), è isomorfo ad $\mathcal{A}$. Si ha dunque la sequenza esatta di omomorfismi

$$\{1\} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{P} \mathcal{G} \longrightarrow \{1\} \tag{2.60}$$

e si dice che $\mathcal{E}$ è una *estensione* di $\mathcal{G}$ per mezzo di $\mathcal{A}$. Siccome gli elementi del nucleo commutano con tutti gli elementi di $\mathcal{E}$, si dice che l'estensione è *centrale*. Si vede che moltiplicatori equivalenti definiscono estensioni isomorfe. Se l'esponente $\xi(r,s)$ è equivalente a zero, $\mathcal{E}$ è il prodotto diretto $\mathcal{A} \times \mathcal{G}$.

Vediamo che si può definire una topologia su $\mathcal{E}$ in modo che gli omomorfismi del diagramma (2.60) siano continui. Abbiamo visto che l'esponente $\xi(r,s)$ è continuo se $r, s \in I$, un intorno dell'identità. Dunque nell'insieme $U(1) \times I \in \mathcal{E}$ munito della topologia del prodotto il prodotto definito dalla (2.58) è continuo. Se I è sufficientemente piccolo, si vede anche che l'elemento

$$(\eta, r)^{-1}(\chi, s)(\eta, r) = (\chi + \xi(s,r) + \xi(r^{-1}, sr), r^{-1}sr) \tag{2.61}$$

è una funzione continua di (χ, s) per $r, s \in I$. Consideriamo ora il caso in cui r è un elemento qualunque di $\mathcal{G}$. Siccome $\mathcal{G}$ è connesso, r è il prodotto di un numero finito di elementi di I. Pertanto, utilizzando più volte il risultato sopra ottenuto, si vede che, fissato (η, r), l'espressione (2.61) è una funzione continua di (χ, s) quando s varia in un intorno di e che può dipendere da r.

Da questi risultati segue che gli intorni dell'unità che definiscono la topologia prodotto in $U(1) \times I$ soddisfano alle condizioni che permettono di definire una topologia su $\mathcal{E}$ compatibile con la sua struttura di gruppo [40, 41]. Possiamo dunque considerare $\mathcal{E}$ come un gruppo topologico. Si noti che la topologia di $\mathcal{E}$ in generale non coincide con la topologia prodotto di $\mathcal{A} \times \mathcal{G}$ e che l'applicazione $r \to (0, r)$ non è necessariamente continua. L'omomorfismo $P : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ è continuo in $(0, e)$ e dunque su tutto il gruppo. Anche la rappresentazione

$$(\eta, r) \to \exp(-i\eta)U(r) \tag{2.62}$$

è evidentemente continua in $(0, e)$ e dunque su tutto il gruppo topologico $\mathcal{E}$.

In conclusione, per trovare una rappresentazione proiettiva continua del gruppo topologico $\mathcal{G}$, si deve trovare una estensione centrale topologica $\mathcal{E}$ ed una sua rappresentazione unitaria continua con la proprietà

$$(\eta, e) \to \exp(-i\eta). \tag{2.63}$$

Le formule (2.38) e (2.41) rientrano nello schema della coomologia dei gruppi [42]. Consideriamo un gruppo abeliano $\mathcal{A}$ per il quale usiamo la notazione additiva. Nel caso che ci interessa, $\mathcal{A}$ è il gruppo additivo dei numeri reali modulo 2π o un suo sottogruppo. Indichiamo con $C^n(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ il gruppo delle *cocatene* di grado n, cioè delle funzioni $f : \mathcal{G}^n \to \mathcal{A}$. Definiamo l'operatore di cobordo $d : C^n(\mathcal{G}, \mathcal{A}) \to C^{n+1}(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ per mezzo della formula

$$\begin{aligned}[][df](r_1, \ldots, r_{n+1}) &= f(r_2, \ldots, r_{n+1}) - f(r_1 r_2, r_3, \ldots, r_{n+1}) \\ &+ f(r_1, r_2 r_3, \ldots, r_{n+1}) - \ldots + (-1)^{n+1} f(r_1, \ldots, r_n).\end{aligned} \tag{2.64}$$

Sia $Z^n(\mathcal{G}, \mathcal{A}) \subset C^n(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ il gruppo dei *cocicli* definiti da $df = 0$ e $B^n(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ il gruppo dei *cobordi* definiti da $f = dg$, con $g \in C^{n-1}(\mathcal{G}, \mathcal{A})$. Con qualche calcolo si vede che $dd = 0$ e dunque si ha $B^n(\mathcal{G}, \mathcal{A}) \subset Z^n(\mathcal{G}, \mathcal{A})$. Cocicli che differiscono per un cobordo si dicono *coomologhi* e le classi di coomologia formano il gruppo quoziente

$$H^n(\mathcal{G}, \mathcal{A}) = Z^n(\mathcal{G}, \mathcal{A})/B^n(\mathcal{G}, \mathcal{A}), \tag{2.65}$$

cioè il *gruppo di coomologia* di grado n.

Nel caso che ci interessa, la condizione (2.38) che caratterizza gli esponenti si può scrivere $d\xi = 0$ e dunque essi sono cocicli di grado 2. L'effetto di un cambiamento della fase di $U(r)$, dato dalla formula (2.41), si può scrivere nella forma $\xi' = \xi + d\eta$, cioè si passa da un cociclo ad un altro cociclo coomologo al primo. Pertanto, le classi di equivalenza dei moltiplicatori (o dei corrispondenti esponenti) sono classificate per mezzo degli elementi del gruppo $H^2(\mathcal{G}, \mathcal{A})$. Se questo gruppo contiene solo l'elemento unità, tutte le rappresentazioni proiettive sono generate direttamente da rappresentazioni unitarie di $\mathcal{G}$.

Anche le diverse estensioni $\mathcal{E}$ di $\mathcal{G}$ per mezzo di $\mathcal{A}$ sono classificate dal gruppo di coomologia $H^2(\mathcal{G}, \mathcal{A})$. Si può tener conto degli aspetti topologici del problema richiedendo che le funzioni che definiscono le cocatene soddisfino a opportune condizioni di regolarità.

2.3 Gruppi di Lie di simmetria.

Nei casi più interessanti, $\mathcal{G}$ è un *gruppo di Lie* di dimensione finita [16, 44–47] ed è possibile operare sulla corrispondente algebra di Lie. A tale scopo è però necessario dare una struttura di gruppo di Lie anche all'estensione $\mathcal{E}$. Questo è possibile se si mostra che ogni esponente è equivalente (coomologo) ad un esponente che è infinitamente differenziabile quando i suoi argomenti appartengono ad un intorno I di e. Infatti, allora si può dare all'insieme $P^{-1}(I)$ la struttura differenziabile del prodotto $U(1)\times I$ ottenendo un gruppo di Lie *locale*. Questo gruppo di Lie locale si può estendere ad un unico gruppo di Lie *semplicemente connesso* $\mathcal{E}^*$, che si può identificare col *ricoprimento universale* di $\mathcal{E}$. In questo modo anche $\mathcal{E}$ acquista una struttura di gruppo di Lie e l'omomorfismo $P : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ risulta differenziabile.

Seguendo [39], indichiamo con dr la misura invariante a sinistra su $\mathcal{G}$ e consideriamo una funzione positiva $\nu(r)$ infinitamente differenziabile, nulla fuori di un piccolo intorno di e con la proprietà

$$\int \nu(r)\, dr = 1. \tag{2.66}$$

La funzione $\xi(r,s)$ in generale è definita $\bmod 2\pi$ ma in un intorno di e la si puo considerare come una funzione reale continua che soddisfa la condizione $d\xi = 0$ (non $\bmod 2\pi$). Le formule che seguono hanno senso solo in questo intorno. Poniamo

$$\eta(r) = -\int \xi(r,t)\nu(t)\, dt, \qquad \xi' = \xi + d\eta. \tag{2.67}$$

Usando la condizione $d\xi = 0$, con qualche calcolo si ottiene

$$\xi'(r,s) = \int \xi(r,t)[\nu(s^{-1}t) - \nu(t)]\, dt. \tag{2.68}$$

Procedendo in modo simile, poniamo

$$\eta'(r) = -\int \xi'(u^{-1},r)\nu(u)\, du, \qquad \xi'' = \xi' + d\eta' \tag{2.69}$$

ed otteniamo

$$\begin{aligned} \xi''(r,s) &= \int \xi'(u^{-1},s)[\nu(ru) - \nu(u)]\, du = \\ &= \int\int \xi(u^{-1},t)[\nu(s^{-1}t) - \nu(t)][\nu(ru) - \nu(u)]\, dt\, du. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Da queste formule si vede immediatamente che, in un intorno di e, il cociclo ξ'' è coomologo al cociclo ξ ed è infinitamente differenziabile come volevasi dimostrare.

Possiamo dunque considerare l'estensione (2.60) nell'ambito della teoria dei gruppi di Lie. Se indichiamo con $L(\mathcal{G})$ ed $L(\mathcal{E})$ le algebre di Lie dei gruppi $\mathcal{G}$ ed $\mathcal{E}$, dato che l'algebra di Lie di $U(1)$ è la retta reale R, otteniamo la seguente estensione centrale di algebre di Lie

$$\{0\} \longrightarrow R \longrightarrow L(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} L(\mathcal{G}) \longrightarrow \{0\}. \tag{2.71}$$

Supponiamo di avere individuato questa estensione. Il passaggio dalle algebre ai gruppi di Lie non è univoco, tuttavia ad ogni algebra di Lie corrisponde un unico gruppo di Lie semplicemente connesso. Inoltre, se indichiamo con $\mathcal{E}^*$ il ricoprimento universale di $\mathcal{E}$, che è semplicemente connesso, ad ogni omomorfismo di algebre di Lie $L(\mathcal{E}) \to L(\mathcal{G})$ corrisponde un unico omomorfismo $\mathcal{E}^* \to \mathcal{G}$ di gruppi di Lie. In questo modo otteniamo il seguente diagramma commutativo di omomorfismi:

$$\begin{array}{ccccc} U(1) & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & & \uparrow & \nearrow & \\ & & \mathcal{E}^* & & \end{array} \tag{2.72}$$

Ogni rappresentazione unitaria di $\mathcal{E}$ definisce anche una rappresentazione unitaria di $\mathcal{E}^*$ e dunque per trovare le rappresentazioni proiettive continue di $\mathcal{G}$ basterà trovare le rappresentazioni unitarie continue di $\mathcal{E}^*$ e vedere quali di esse rappresentano il nucleo dell'omomorfismo $\mathcal{E}^* \to \mathcal{G}$ per mezzo di fattori di fase.

Particolarmente interessante è il caso in cui l'estensione di algebre di Lie è triviale, cioè esiste un isomorfismo σ di $L(\mathcal{G})$ su di una sottoalgebra di $L(\mathcal{E})$ tale che $\pi\sigma$ sia l'applicazione identica

$$R \longrightarrow L(\mathcal{E}) \underset{\xleftarrow[\sigma]{}}{\xrightarrow{\pi}} L(\mathcal{G}). \tag{2.73}$$

In questo caso, se si indica con $\mathcal{G}^*$ il ricoprimento universale di $\mathcal{G}$, si ottiene il seguente diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi

$$\begin{array}{ccccc} U(1) & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & & & \nwarrow & \uparrow \\ & & & & \mathcal{G}^* \end{array} \tag{2.74}$$

e si vede che ogni rappresentazione di $\mathcal{E}$ è anche una rappresentazione di $\mathcal{G}^*$. Dunque tutte le rappresentazioni proiettive continue di $\mathcal{G}$ provengono da rappresentazioni unitarie continue del suo ricoprimento universale $\mathcal{G}^*$.

Dobbiamo ora individuare le estensioni centrali di $L(\mathcal{G})$ per mezzo di R. Possiamo sempre trovare un'applicazione lineare σ di $L(\mathcal{G})$ su di un sottospazio lineare di $L(\mathcal{E})$ supplementare al nucleo di π, che per semplicità identifichiamo con R. In generale, σ non sarà un omomorfismo di algebre di Lie. Ogni elemento di $L(\mathcal{E})$ si può scrivere nella forma $\eta + \sigma(a)$ con $\eta \in R$ ed $a \in L(\mathcal{G})$ e si ha

$$\pi(\eta + \sigma(a)) = a. \tag{2.75}$$

Siccome π è un omomorfismo, si ha

$$\pi([\sigma(a), \sigma(b)]) = [a, b] \tag{2.76}$$

e dunque

$$[\sigma(a), \sigma(b)] = \sigma([a, b]) + \alpha(a, b), \tag{2.77}$$

dove $\alpha(a, b) \in R$ è una funzione bilineare antisimmetrica. Dalla identità di Jacobi si ottiene la condizione

$$\alpha([a, b], c) + \alpha([c, a], b) + \alpha([b, c], a) = 0. \tag{2.78}$$

Se si sceglie un'altra applicazione lineare

$$\sigma'(a) = \sigma(a) + \beta(a), \tag{2.79}$$

con $\beta(a) \in R$, si ha

$$[\sigma'(a), \sigma'(b)] = \sigma'([a, b]) + \alpha'(a, b), \tag{2.80}$$

con

$$\alpha'(a, b) = \alpha(a, b) - \beta([a, b]). \tag{2.81}$$

Queste formule rientrano nello schema della coomologia delle algebre di Lie [46, 48]. Se ci limitiamo a considerare la coomologia a coefficienti reali, le cocatene sono funzionali multilineari antisimmetrici $f : L(\mathcal{G})^n \to R$; esse formano il gruppo $C^n(L(\mathcal{G}), R)$. L'operatore di cobordo $d : C^n \to C^{n+1}$ è definito da

$$[df](a_1, \ldots, a_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i<k} (-1)^{i+k} f([a_i, a_k], a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_k, \ldots, a_{n+1}), \tag{2.82}$$

dove gli argomenti $\hat{a}_i, \hat{a}_k$ devono essere omessi. Esso ha la proprietà $dd = 0$. Si possono dunque definire nel solito modo i cocicli, i cobordi ed i gruppi di coomolgia $H^n(L(\mathcal{G}), R)$. Essi sono spazi vettoriali reali.

Dalle formule scritte sopra si vede che la condizione soddisfatta dalla funzione $\alpha(a, b)$ si può scrivere nella forma $d\alpha = 0$, dunque α è un cociclo. La relazione tra α' ed α si può scrivere nella forma $\alpha' = \alpha + d\beta$ dunque essi sono due cocicli coomologhi. Ne segue che le differenti estensioni centrali di $L(\mathcal{G})$ per mezzo di R sono classificate dal gruppo di coomologia $H^2(L(\mathcal{G}), R)$.

Consideriamo come primo esempio il caso in cui $\mathcal{G} = \mathbf{R}$, il gruppo additivo dei numeri reali. La corrispondente algebra di Lie è unidimensionale e non ha cocicli non nulli di grado 2. Inoltre $\mathcal{G}$ è semplicemente connesso e dunque coincide con $\mathcal{G}^*$. Ne segue che tutte le rappresentazioni proiettive provengono da rappresentazioni unitarie nello spazio di Hilbert, in accordo con il risutato ottenuto con un metodo più diretto nella Sezione 2.2.

La coomologia dell'algebra di Lie $L(\mathcal{G})$ ha anche un significato fisico diretto. Consideriamo la restrizione della rappresentazione U ad un sottogruppo ad un parametro di $\mathcal{E}$

$$\exp[t(\eta + \sigma(a))] \longrightarrow \exp[-it(\eta + F_a)], \tag{2.83}$$

dove al primo membro compare l'applicazione esponenziale [47] $\exp : L(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$. Si è tenuto presente il fatto che il sottogruppo generato dal nucleo R dell'estensione $L(\mathcal{E})$ deve essere rappresentato da fattori di fase. Gli operatori autoaggiunti F_a (teorema di Stone) non hanno in generale lo stesso dominio di definizione. Tuttavia, come vedremo nella sezione 3.5, esiste un sottospazio lineare denso nello spazio di Hilbert che è trasformato in se stesso da tutti gli operatori F_a e tale che in esso valgono le relazioni di commutazione

$$[F_a, F_b] = i\alpha(a, b) + iF[a, b], \tag{2.84}$$

dove compaiono i cocicli di grado 2. In altre parole,

$$\eta + \sigma(a) \longrightarrow -i(\eta + F_a) \tag{2.85}$$

è una rappresentazione di $L(\mathcal{E})$.

Se si introduce la nuova applicazione lineare $\sigma'(a) = \sigma(a) + \beta(a)$, si può scrivere

$$\exp[t(\eta + \sigma'(a))] \longrightarrow \exp[-it(\eta + F'_a)], \tag{2.86}$$

dove

$$F'_a = F_a + \beta(a). \tag{2.87}$$

Si vede che la cocatena di grado 1 $\beta(a)$ descrive la costante additiva arbitraria presente nei generatori F_a. Se non si vogliono cambiare le relazioni di commutazione, bisogna imporre la condizione $d\beta = 0$, cioè β deve essere un cociclo. Pertanto, il gruppo $Z^1(L(\mathcal{G}), R) = H^1(L(\mathcal{G}), R)$ descrive l'arbitrarietà nella definizione dei generatori F_a.

Il calcolo dei gruppi $H^n(L(\mathcal{G}), R)$ coinvolge solo spazi di dimensione finita ed è dunque relativamente semplice. Sono utili in questo campo i metodi dell'omotopia, cioè sostanzialmente l'osservazione che un operatore del tipo

$$\theta = id + di \tag{2.88}$$

trasforma cocicli in cobordi.

Per ogni elemento a dell'algebra $L(\mathcal{G})$ introduciamo l'operatore $i_a : C^n \to C^{n-1}$ definito da

$$[i_a f](a_1, \ldots, a_{n-1}) = f(a, a_1, \ldots, a_{n-1}) \tag{2.89}$$

e l'operatore $\theta_a : C^n \to C^n$ definito da

$$\theta_a = i_a d + d i_a. \tag{2.90}$$

Se si indica con $a \to \mathrm{ad}_a$, dove

$$\mathrm{ad}_a b = [a, b], \tag{2.91}$$

la rappresentazione aggiunta dell'algebra di Lie, che opera nello spazio lineare sottostante all'algebra, l'operatore θ_a prende la forma esplicita

$$[\theta_a f](a_1, \ldots, a_n) =$$

$$= -f(\mathrm{ad}_a a_1, a_2, \ldots, a_n) \ldots - f(a_1, \ldots, a_{n-1}, \mathrm{ad}_a a_n). \tag{2.92}$$

Con qualche calcolo si ottengono le proprietà

$$d\theta_a = \theta_a d \tag{2.93}$$

$$\theta_a \theta_b - \theta_b \theta_a = \theta_{[a,b]}. \tag{2.94}$$

La seconda formula mostra che gli operatori θ_a formano delle rappresentazioni dell'algebra di Lie $L(\mathcal{G})$ negli spazi C^n.

Supponiamo che $L(\mathcal{G})$ abbia una sottoalgebra S semisemplice [46], per esempio l'algebra di Lie del gruppo delle rotazioni o del gruppo di Lorentz omogeneo. Ogni rappresentazione finito-dimensionale di S si decompone nella somma diretta di rappresentazioni irriducibili; possiamo dunque porre

$$C^n = C'^n \oplus C''^n, \tag{2.95}$$

dove gli operatori θ_s con $s \in S$ si annullano sul sottospazio C'^n ed il sottospazio C''^n è generato da elementi del tipo $\theta_s f$ con $s \in S, f \in C''^n$. Dalla prima proprietà sopra elencata degli operatori θ_s segue che una simile decomposizione vale anche per gli spazi Z^n, B^n, H^n. H'^n è il gruppo di coomolgia costruito con cocatene appartenenti a C'^n, cioè cocatene invarianti rispetto alle trasformazioni $\exp(t\theta_s), s \in S$.

Mostriamo che $H''^n = 0$, cioè che $H^n = H'^n$ Infatti, tutti i cocicli di Z''^n sono combinazioni lineari di elementi del tipo $\theta_s f$ con $f \in Z''^n$ e dunque sono cobordi. In conclusione, per calcolare i gruppi di coomolgia, basta considerare cocicli invarianti rispetto alla sottoalgebra semisemplice S. Nel caso da noi considerato, i cocicli di primo grado sono definiti dalla condizione

$$\beta([a,b]) = 0 \tag{2.96}$$

e sono automaticamente invarianti. I cocicli invarianti di secondo grado sono definiti dalle condizioni (2.78) e

$$\alpha([s,a],b) + \alpha(a,[s,b]) = 0, \qquad s \in S, \tag{2.97}$$

da cui segue

$$\alpha([a,b],s) = 0, \qquad s \in S. \tag{2.98}$$

Se l'algebra $L(\mathcal{G})$ stessa è semisemplice, possiamo porre $S = L(\mathcal{G})$. Siccome un'algebra semisemplice è generata da elementi del tipo $[a,b]$, dalle equazioni sopra scritte segue immediatamente $H^1 = 0$ ed $H^2 = 0$. Questo è un caso particolare del lemma di Whitehead [48].

2.4 Automorfismi dell'algebra delle osservabili e rottura spontanea di simmetria.

Come per descrivere le traslazioni temporali si può usare il formalismo di Heisenberg, così anche le altre operazioni di simmetria possono essere descritte per mezzo di un operatore che agisce nello spazio delle osservabili. Se U_r, $r \in \mathcal{G}$, è l'operatore unitario (trascuriamo per ora gli operatori antiunitari) che agisce sui vettori nello spazio di Hilbert, la trasformazione dell'operatore A che descrive una osservabile è data da

$$A \to U_r A U_r^{-1}. \tag{2.99}$$

Questa formula definisce un automorfismo dell'algebra degli operatori che non dipende dalla fase di U_r. Si ha dunque una rappresentazione del gruppo di simmetria $\mathcal{G}$ per mezzo di automorfismi dell'algebra degli operatori.

Se si preferisce basare la teoria su di una algebra C^* astratta $\mathcal{A}$, una operazione di simmetria r sarà rappresentata da un automorfismo $x \to \alpha_r(x)$ di $\mathcal{A}$, cioè una trasformazione lineare di $\mathcal{A}$ su se stessa che mantiene il prodotto, l'involuzione e la norma. Se π è una rappresentazione di $\mathcal{A}$, avremo

$$\pi(\alpha_r(x)) = U_r \pi(x) U_r^{-1}. \tag{2.100}$$

Può accadere che un elemento $r \in \mathcal{G}$ sia rappresentato da un automorfismo α_r, ma, data una rappresentazione π non esista un operatore unitario U_r che soddisfi la (2.100). In tal caso si dice che la simmetria è *rotta spontamente* (nella rappresentazione π). La formula (2.100) indica che le rappresentazioni $x \to \pi(x)$ e $x \to \pi(\alpha_r(x))$ sono unitariamente equivalenti; la rottura spontanea si ha quando le due rappresentazioni non sono equivalenti. Vedremo nella sezione 3.4 che in un sistema con finiti gradi di libertà l'algebra generata dalle relazioni di commutazione canoniche ha una sola classe di equivalenza di rappresentazioni. In questo caso non si può avere rottura spontanea di simmetria.

Una condizione sufficiente per l'esistenza dell'operatore unitario U_r è l'esistenza di un vettore ciclico invariante per la rappresentazione π. Tenuto conto dei risultati della sezione 1.4, basta mostrare che se il funzionale positivo ρ è invariante, cioè soddisfa la condizione

$$\rho(\alpha_r(x)) = \rho(x), \tag{2.101}$$

la costruzione di GNS permette di ottenere anche l'operatore U_r. Usiamo le notazioni introdotte nella sezione 1.4. Si vede immediatamente che α_r trasforma l'ideale $\mathcal{I}$ in se stesso e dunque definisce un operatore U_r nello spazio quoziente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Questo operatore è isometrico e dunque si estende per continuità a tutto lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Dalla equazione

$$\alpha_r(x)y = \alpha_r(x\alpha_r^{-1}(y)) \tag{2.102}$$

per passaggio al quoziente si ottiene la (2.100).

Indice