Capitolo 3

Rappresentazioni unitarie.

3.1 Decomposizione delle rappresentazioni unitarie.

Ricordiamo che gli operatori unitari $U(r), \ \ r \in \mathcal{G}$ nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ formano una *rappresentazione unitaria continua* di $\mathcal{G}$ se si ha

$$U(rs) = U(r)U(s) \tag{3.1}$$

e $U(r)\psi$ è una funzione fortemente continua di r per ogni $\psi \in \mathcal{H}$. Due rappresentazioni U e U', che operano rispettivamente sugli spazi di Hilbert $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{H}'$, sono *equivalenti* se esiste un isomorfismo W di $\mathcal{H}$ su $\mathcal{H}'$ (cioè una applicazione lineare invertibile che preserva il prodotto scalare) tale che

$$WU(r) = U'(r)W. \tag{3.2}$$

Un sottospazio (chiuso) $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ si dice *invariante* se tutti gli operatori $U(r)$ lo trasformano in se stesso. In altre parole, l'operatore di proiezione P sul sottospazio $\mathcal{H}'$ ha la proprietà $PU(r)P = U(r)P$ per ogni r. Poichè la rappresentazione è unitaria, considerando gli aggiunti di questi operatori si ottiene anche $PU(r)P = PU(r)$ per ogni r e pertanto si vede che $\mathcal{H}'$ è invarainte se e solo se P commuta con tutti gli operatori della rappresentazione. Ma allora anche $1 - P$ ha la stessa proprietà ed il sottospazio $\mathcal{H}''$ ortogonale ad $\mathcal{H}'$ è pure invariante. In questo caso la rappresentazione U si spezza nella *somma diretta* di due rappresentazioni e si scrive

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'', \qquad U = U' \oplus U''. \tag{3.3}$$

Se non esistono sottospazi invarianti propri (cioè diversi da $\mathcal{H}$ e da $\{0\}$), di dice che la rappresentazione U è *irriducibile*. Indichiamo con $\mathcal{N}$ l'insieme (simmetrico) di tutti gli operatori $U(r)$ e con $\mathcal{N}'$ l'algebra di von Neumann commutante. U è irriducibile se e solo se $\mathcal{N}'$ non contiene operatori di proiezione non banali (diversi da 0 e da 1). Siccome un'algebra di von Neumann contiene i proiettori spettrali di ogni operatore hermitiano in essa contenuto, si vede che U è irriducibile se e solo se $\mathcal{N}' = \mathbf{C}$, il campo dei numeri complessi (considerati come operatori in $\mathcal{H}$). La decomposizione di una rappresentazione unitaria in rappresentazioni più semplici è un problema importante e complesso. Nel seguito introduciamo alcuni concetti fondamentali; per maggiori dettagli, si consultino i testi [15–18,49,50]. Una trattazione simile si può dare anche per le rappresentazioni simmetriche di un'algebra di Banach simmetrica.

Un sistema le cui proprietà di trasformazione rispetto al gruppo di simmetria $\mathcal{G}$ sono descritte da una rappresentazione unitaria irriducibile si dice *elementare*. I sistemi elementari rispetto al gruppo di simmetria spazio-temporale si possono interpretare come particelle libere (non soggette a forze). In questo caso lo spazio $\mathcal{H}$ della rappresentazione non descrive gradi di libertà "interni", nel senso che dato uno stato qualunque ψ, gli stati del tipo $U_g\psi$ (che hanno la stessa struttura interna) e le loro combinazioni lineari formano un insieme denso in $\mathcal{H}$.

Date due rappresentazioni U e U', un operatore limitato qualunque W che soddisfa alla (3.2) si chiama *operatore di allacciamento*. Gli operatori di allacciamento di una rappresentazione U con se stessa formano l'algebra di von Neumann commutante $\mathcal{N}'$. A partire da un operatore di allacciamento W non nullo, si può sempre costruire un altro operatore di allacciamento che trasforma isometricamente un sottospazio di $\mathcal{H}$ in un sottospazio di $\mathcal{H}'$. In altre parole, esiste una sottorappresentazione di U equivalente ad una sottorappresentazione di U'. Se non esistono operatori di allacciamento non nulli, si dice che le due rappresentazioni U e U' sono *disgiunte*.

Se una rappresentazione unitaria U non si può decomporre nella somma diretta di due rappresentazioni disgiunte, essa si dice *primaria* o *fattoriale*. Se $P \in \mathcal{N}'$ è un operatore di proiezione non banale, $\mathcal{H}$ si decompone nella somma diretta dei sottospazi invarianti $P\mathcal{H}$ e $(1-P)\mathcal{H}$. Un operatore di allacciamento tra le rispettive sottorappresentazioni ha la forma $A = (1-P)BP = AP - PA$ con $B \in \mathcal{N}'$. Si vede che se $P \in \mathcal{N}''$, un operatore di allacciamento A non nullo non esiste e le due sottorappresentazioni sono disgiunte. D'altra parte, se $P \notin \mathcal{N}''$ esiste un operatore non nullo $B \in \mathcal{N}'$ che non commuta con P, almeno uno dei due operatori di allacciamento $(1-P)BP = (1-P)(BP - PB)$ o $(1-P)B^*P = -(P(BP-PB))^*$ è non nullo e le due sottorappresentazioni non sono disgiunte. In conclusione, sui sottospazi $P\mathcal{H}$ e $(1-P)\mathcal{H}$ operano rappresentazioni disgiunte se e solo se $P \in \mathcal{N}' \cap \mathcal{N}''$. Dunque la rappresentazione è fattoriale se e solo se l'algebra di von Neumann $\mathcal{Z} = \mathcal{N}' \cap \mathcal{N}''$ (il centro di $\mathcal{N}'$) non contiene operatori di proiezione non banali e dunque $\mathcal{Z} = \mathbf{C}$. In questo caso si dice che le algebre di von Neumann $\mathcal{N}'$ e $\mathcal{N}''$ sono dei *fattori*.

Le rappresentazioni irriducibili sono primarie, ma anche la somma diretta U di n copie (o di una infinità numerabile di copie) della stessa rappresentazione irriducibile V è primaria. Se $\mathcal{H}'$ è lo spazio di V e $\mathcal{H}''$ è uno spazio di Hilbert di dimensione n (o di dimensione infinita) si può pensare che U operi su $\mathcal{H}'' \otimes \mathcal{H}'$ e porre $U(r) = 1 \otimes V(r)$. Si ha in tal caso $\mathcal{N}' = \mathcal{B}(\mathcal{H}'') \otimes \mathbf{C}$ e $\mathcal{N}'' = \mathbf{C} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}')$, dove $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$ è l'algebra di tutti gli operatori limitati in $\mathcal{H}'$. Le rappresentazioni primarie di questo tipo si dicono *di tipo* I, ma esistono anche rappresentazioni primarie di tipo II e di tipo III. Tutti i gruppi che incontreremo hanno solo rappresentazioni primarie di tipo I e si dice che sono di tipo I.

Abbiamo visto nella Sezione 1.3 che se $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra C^* commutativa di $\mathcal{N}'$ ed S è il suo spettro, lo spazio di Hilbert si può scrivere come un integrale diretto rispetto al quale $\mathcal{A}$ (ed anche la sua chiusura debole $\mathcal{A}''$) è diagonale e tutti gli operatori $U(r)$ sono decomponibili. Possiamo dunque scrivere

$$\mathcal{H} = \int_S^\oplus \mathcal{H}(k)\, d\mu(k), \qquad U(r) = \int_S^\oplus U_k(r)\, d\mu(k) \tag{3.4}$$

ed abbiamo

$$U_k(r)U_k(s) = U_k(rs) \tag{3.5}$$

se k non appartiene ad un insieme di misura nulla I_{rs} che dipende da r e da s. Possimo dunque dire che U_k è una rappresentazione se k non appartiene all'unione di tutti gli insiemi I_{rs}. Se $\mathcal{G}$ è un gruppo numerabile e discreto questa unione ha misura nulla e può essere trascurata nella definizione dell'integrale diretto. Inoltre le rappresentazioni U_k sono ovviamente continue. In questa situazione si dice che U è l'integrale diretto delle rappresentazioni U_k. Lo stesso risultato si può dimostrare con un ragionamento più complicato (che utilizza l'esistenza di una misura invariante sul gruppo) anche in casi più generali. In particolare si ha:

Teorema 7 *Sia U è una rappresentazione unitaria continua del gruppo $\mathcal{G}$ localmente compatto avente una base numerabile di insiemi aperti. Consideriamo un'algebra C^* commutativa $\mathcal{A}$ contenuta nel commutante $\mathcal{N}'$ ed indichiamo con S il suo spettro. Allora esiste una decomposizione* (3.4) *di U in un integrale diretto di rappresentazioni unitarie continue.*

Se $\mathcal{A}''$ è una sottoalgebra commutativa massima di $\mathcal{N}'$, le rappresentazioni U_k sono irriducibili (sempre trascurando sottoinsiemi di S di misura nulla). Per ottenere questo risultato, indichiamo con $\mathcal{N}_k$ l'insieme degli operatori U_k e con $\mathcal{N}_k'$ il suo commutante e consideriamo l'operatore

$$A = \int_S^{\oplus} A(k)\, d\mu(k), \qquad A(k) \in \mathcal{N}_k'. \tag{3.6}$$

Esso appartiene a $\mathcal{N}'$ ed, essendo decomponibile, commuta con tutti gli elementi di $\mathcal{A}''$ e siccome questa è una sottoalgebra abeliana massima di $\mathcal{N}'$, si deve avere $A \in \mathcal{A}''$. Dunque A è diagonale e $A(k)$, che è un generico elemento di $\mathcal{N}_k'$, deve essere un multiplo dell'unità. Il risultato voluto segue immediatamente.

Se $\mathcal{A}'' = \mathcal{Z} = \mathcal{N}' \cap \mathcal{N}''$, si ottiene la *decomposizione centrale* e le rappresentazioni U_k sono primarie. Consideriamo l'operatore

$$A = \int_S^{\oplus} A(k)\, d\mu(k), \qquad A(k) \in \mathcal{N}_k' \cap \mathcal{N}_k''. \tag{3.7}$$

Questo operatore appartiene a $\mathcal{N}' \cap \mathcal{N}''$ e dunque è diagonale, ovvero $A(k)$ è un multiplo dell'unità per quasi tutti i valori di k, come volevasi dimostrare. Si dimostra anche che, a meno di un insieme di misura nulla, le rappresentazioni U_k sono a due a due disgiunte.

Consideriamo ora il caso particolare in cui $\mathcal{G}$ è commutativo. Si ha $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$ e dunque tutte le sue r.u.i (continue) sono unidimensionali e si chiamano i *caratteri* del gruppo. L'inverso $k(r)^{-1}$ di un carattere $k(r)$ ed il prodotto $k(r) = k'(r)k''(r)$ di due caratteri sono ancora caratteri, dunque i caratteri formano un gruppo, $\hat{\mathcal{G}}$, il gruppo *duale* di $\mathcal{G}$. Se si introduce la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi compatti di $\mathcal{G}$, $\hat{\mathcal{G}}$ diventa un gruppo topologico localmente compatto. Il suo duale è isomorfo a $\mathcal{G}$. Questo è il teorema di dualità di Pontryagin [15, 16, 41].

Data una coppia $\mathcal{G}$, $\hat{\mathcal{G}}$ di gruppi commutativi localmente compatti duali, si possono definire le trasformazioni di Fourier generalizzate per mezzo delle formule

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathcal{G}} f(r)k(r)\, d\mu(r), \tag{3.8}$$

$$f(r) = \int_{\hat{\mathcal{G}}} \tilde{f}(k)\overline{k(r)}\, d\hat{\mu}(k), \tag{3.9}$$

$$\int_{\mathcal{G}} |f(r)|^2\, d\mu(r) = \int_{\hat{\mathcal{G}}} |\tilde{f}(k)|^2\, d\hat{\mu}(k), \tag{3.10}$$

che valgono sotto condizioni simili a quelle del caso classico e per opportune normalizzazioni delle misure invarianti μ e $\hat{\mu}$.

Se consideriamo una rappresentazione unitaria U di $\mathcal{G}$ e la sua decomposizione centrale ottenuta ponendo $\mathcal{A} = \mathcal{Z} = \mathcal{N}'' \subset \mathcal{N}'$, gli operatori $U(r) \in \mathcal{A}$ sono diagonali e si ha

$$U_k(r) = k(r)1_k, \tag{3.11}$$

dove abbiamo indicato con 1_k l'operatore unità in $\mathcal{H}_k$. Dunque la decomposizione prende la forma

$$U(r) = \int_S^{\oplus} k(r)\, d\mu(k) = \int_S k(r)\, dE(k), \tag{3.12}$$

dove $E(k)$ è la misura spettrale definita dall'integrale diretto. Notiamo che $k(r)$ è un carattere di $\mathcal{G}$.

È possibile sostituire l'insieme di integrazione S (i cui elementi sono i caratteri di $\mathcal{A}$) con il gruppo duale $\hat{\mathcal{G}}$ (i cui elementi sono i caratteri di $\mathcal{G}$) che ha una topologia più semplice e più significativa, ottenendo il seguente teorema SNAG (Stone, Naimark, Ambrose, Godement) [15]:

Teorema 8 *Se $\mathcal{G}$ è un gruppo localmente compatto commutativo, ogni sua rappresentazione unitaria continua ha la forma*

$$U(r) = \int_{\hat{\mathcal{G}}} k(r)\, dE(k), \tag{3.13}$$

dove E è una misura spettrale sul gruppo localmente compatto $\hat{\mathcal{G}}$ dei caratteri di $\mathcal{G}$.

Se $\mathcal{G} = \hat{\mathcal{G}} = \mathbf{R}$ è il gruppo additivo dei numeri reali, possimo porre $k(r) = \exp(ikr)$ ed, in accordo con il teorema di Stone [12], abbiamo

$$U(x) = \exp(-ixK) = \int exp(-ikx)\, dE(k), \tag{3.14}$$

dove E è la misura spettrale corrispondente all'operatore autoaggiunto K.

Partendo da questa formula è facile dimostrare il teorema SNAG per il gruppo $\mathbf{R}^n$. Se indichiamo con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{k}$ dei vettori, con x_i e k_i le loro componenti e con $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ il loro prodotto scalare, possiamo scrivere

$$U(\mathbf{x}) = U_1(x_1) \cdots U_n(x_n) = \int exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \, dE_1(k_1) \cdots dE_n(k_n) =$$

$$= \int exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \, dE(\mathbf{k}), \tag{3.15}$$

dove abbiamo introdotto la misura prodotto $dE(\mathbf{k})$ su $\mathbf{R}^n$.

3.2 Sistemi di imprimitività e rappresentazioni indotte.

In questa Sezione introduciamo alcuni concetti che useremo sistematicamente nel seguito. Un *sistema di imprimitività* è composto da un gruppo localmente compatto $\mathcal{G}$, una sua rappresentazione unitaria continua $a \to V(a)$ nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, uno spazio $\mathcal{S}$ localmente compatto sul quale agisce con continuità il gruppo $\mathcal{G}$. Inoltre, sui sottoinsiemi di Borel di $\mathcal{S}$ è definita una misura spettrale $I \to E(I)$ i cui valori sono operatori di proiezione in $\mathcal{H}$, e che soddisfa alla relazione di covarianza

$$V(a)E(I)V(a)^{-1} = E(\Lambda(a)I), \qquad a \in \mathcal{G}, \qquad I \subset \mathcal{S}. \tag{3.16}$$

Abbiamo indicato con $\Lambda(a)k \in \mathcal{S}$, dove $a \in \mathcal{G}$ e $k \in \mathcal{S}$, l'azione di $\mathcal{G}$ su $\mathcal{S}$. Supponiamo sempre che $\mathcal{H}$ sia separabile e che $\mathcal{G}$ ed S abbiano una base numerabile di insiemi aperti. Queste ipotesi sono soddisfatte nelle usuali applicazioni alla meccanica quantistica. L'ipotesi che $\mathcal{G}$ sia localmente compatto è fisicamente rilevante, come vedremo nella Sezione 3.6.

Il sistema di imprimitività è irriducibile se in $\mathcal{H}$ non esiste un sottospazio di Hilbert proprio invariante rispetto a tutti gli operatori $V(a)$ e $E(I)$. Il supporto della misura E è invariante per l'azione di $\mathcal{G}$. Se esso si spezza in due sottinsiemi I' ed I'' invarianti (a meno di insiemi di misura nulla) ed entrambi di misura diversa da zero, i proiettori $E(I')$ ed $E(I'')$ commutano con gli operatori $V(a)$. Dunque essi proiettano su sottospazi di $\mathcal{H}$ invarianti per la rappresentazione V, ed il sistema di imprimitività è riducibile. Se questo non succede si dice che il sistema di imprimitività è *ergodico*. Se le orbite sono abbastanza “regolari”, il sistema è ergodico se e solo se è *transitivo*, cioè se la misura $E(I)$ è concentrata in una sola orbita. Si può in questo caso considerare la misura E come definita sull'orbita ed identificare questa con $\mathcal{S}$. Si ha dunque un sistema di imprimitività transitivo sullo spazio omogeneo $\mathcal{S}$. Nel seguito considereremo solo questo caso.

Scegliamo un elemento rappresentativo q dell'orbita $\mathcal{S}$ e consideriamo il sottogruppo chiuso H_q di $\mathcal{G}$ che lascia invariato l'elemento q. Esso è definito dalla condizione $\Lambda(a)q = q$ ed è chiamato *gruppo piccolo* o *stabilizzatore*. Mackey [49–51] ha dimostrato un teorema generale molto utile, il *teorema di imprimitività* che, dato un sistema di imprimitività transitivo, permette di esprimere esplicitamente la rappresentazione V come una *rappresentazione indotta* da una rappresentazione unitaria di H_q. La dimostrazione di questo teorema, che riassumiamo nel seguito senza pretese di completezza, è sostanzialmente una generalizzazione del procedimento usato da Wigner [43] per trovare le r.u.i. del gruppo di Poincaré.

Il Teorema 3 ci permette di costruire, a partire dalla misura spettrale E, una decomposizione dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ in integrale diretto

$$\mathcal{H} = \int_S^{\oplus} \mathcal{H}(k)\, d\mu(k), \tag{3.17}$$

in modo che gli operatori del tipo

$$F = \int_S f(k)\, dE(k) \tag{3.18}$$

si possano scrivere nella forma diagonale

$$[F\psi](k) = f(k)\psi(k). \tag{3.19}$$

In particolare si ha

$$[E(I)\psi](k) = f_I(k)\psi(k), \tag{3.20}$$

dove $f_I(k)$ è la funzione caratteristica dell'insieme I.

Ricordiamo che μ deve avere gli stessi insiemi di misura nulla della misura spettrale E. Dalla condizione (3.16) segue che un elemento di $\mathcal{G}$ trasforma μ in una misura con gli stessi insiemi di misura nulla, cioè in una misura equivalente. Una misura con questa proprietà si dice *quasi invariante* rispetto al gruppo. Se il gruppo $\mathcal{G}$ opera transitivamente, esiste sempre una ed una sola classe di equivalenza di misure quasi invarianti. Dalla condizione (3.16) segue anche che gli spazi $\mathcal{H}(k)$ hanno tutti la stessa dimensione. Possiamo dunque identificarli tra di loro, scegliendo in ognuno di essi la base introdotta nella dimostrazione del Teorema 3 e considerando eguali vettori che hanno le stesse componenti.

Possiamo poi definire gli operatori $W(a)$

$$[W(a)\psi](k) = \left[\frac{d\mu(k')}{d\mu(k)}\right]^{\frac{1}{2}} \psi(k'), \qquad k' = \Lambda(a)^{-1}k, \tag{3.21}$$

che formano una rappresentazione di $\mathcal{G}$. Abbiamo introdotto la derivata di Radon-Nicodym, che esiste dato che μ è quasi invariante. Se μ è invariante la derivata vale 1. Se si ricorda che

$$\|\psi\|^2 = \int_S \|\psi(k)\|^2\, d\mu(k), \tag{3.22}$$

si vede che

$$\|W(a)\psi\|^2 = \int_S \|\psi(k')\|^2 \frac{d\mu(k')}{d\mu(k)}\, d\mu(k) = \|\psi\|^2, \tag{3.23}$$

cioè che gli operatori $W(a)$ sono unitari. Inoltre si vede facilmente che

$$W(a)E(I)\, W(a^{-1}) = E(\Lambda(a)I). \tag{3.24}$$

Confrontando con la (3.16), si vede che l'operatore unitario $Q(a) = V(a)W(a)^{-1}$ commuta con tutti gli operatori $E(I)$ e dunque con tutti gli operatori diagonalizzabili della forma (3.18). Dal Teorema 4 segue che esso è decomponibile, cioè si può scrivere nella forma

$$[Q(a)\psi](k) = Q(a,k)\psi(k). \tag{3.25}$$

Si ha dunque la seguente formula per gli operatori $V(a) = Q(a)W(a)$

$$[V(a)\psi](k) = \left[\frac{d\mu(k')}{d\mu(k)}\right]^{\frac{1}{2}} Q(a,k)\psi(k'). \tag{3.26}$$

Bisogna ricordare che l'operatore $Q(a,k)$ è definito se k non appartiene ed un sottoinsieme di misura nulla di S, che può dipendere da a.

Dal fatto che gli operatori $V(a)$ formano una rappresentazione, segue la condizione

$$Q(ab,k) = Q(a,k)\, Q(b, \Lambda(a)^{-1}k), \tag{3.27}$$

che ha senso se k non appartiene ad un insieme di misura nulla che può dipendere da a e da b. Se si assume che essa vale per ogni valore di k, l'eguaglianza

$$R(a) = Q(a,q), \qquad a \in H_q \tag{3.28}$$

definisce una rappresentazione unitaria del sottogruppo H_q. Altrimenti è necessario un argomento più complicato.

Notiamo che l'equazione

$$Q(cb^{-1}a, \Lambda(c)q) = Q(cb^{-1}, \Lambda(c)q)\, Q(a, \Lambda(b)q) \tag{3.29}$$

vale se la terna $\{a,b,c\}$ non appartiene ad un insieme di misura nulla in $\mathcal{G}^3$. Segue che si può fissare $c = c_0$ in modo che l'equazione vale per $\{a,b\}$ non appartenente ad un insieme di misura nulla in $\mathcal{G}^2$. Possiamo dunque porre fuori da questo insieme

$$Q(a, \Lambda(b)q) = B(b)^{-1}B(a^{-1}b), \tag{3.30}$$

dove abbiamo introdotto gli operatori unitari

$$B(b) = Q(c_0 b^{-1}, \Lambda(c_0)q). \tag{3.31}$$

Segue che

$$B(b)^{-1}B(a^{-1}b) = B(bc)^{-1}B(a^{-1}bc), \qquad c \in H_q, \tag{3.32}$$

e dunque che

$$B(a^{-1}b)B(a^{-1}bc)^{-1} = B(b)B(bc)^{-1}. \tag{3.33}$$

In conclusione, gli operatori unitari

$$B(b)B(bc)^{-1} = R(c), \qquad c \in H_q \tag{3.34}$$

non dipendonno da b e segue facilmente dalla loro definizione che essi formano una rappresentazione unitaria di H_q. Si può anche dimostrare che questa rappresentazione è continua.

Poniamo

$$\phi(a) = B(a)\psi(k), \qquad k = \Lambda(a)q. \tag{3.35}$$

Si vede che $\|\phi(a)\| = \|\psi(k)\|$ dipende solo da k e si può scrivere la norma nella forma

$$\|\phi\|^2 = \int_S \|\phi(a)\|^2 \, d\mu(k). \tag{3.36}$$

Se $b \in H_q$, abbiamo

$$\phi(ab^{-1}) = B(ab^{-1})\psi(k) = R(b)B(a)\psi(k) \tag{3.37}$$

e dunque vale la *relazione di covarianza*

$$\phi(ab^{-1}) = R(b)\phi(a), \qquad b \in H_q. \tag{3.38}$$

L'operatore $V(a)$ agisce sulla nuova funzione nel seguente modo:

$$[V(a)\phi](b) = \left[\frac{d\mu(k')}{d\mu(k)}\right]^{\frac{1}{2}} B(b)Q(a,k)\psi(k'),$$

$$k = \Lambda(b)q, \qquad k' = \Lambda(a^{-1})k = \Lambda(a^{-1}b)q. \tag{3.39}$$

e dunque

$$[V(a)\phi](b) = \left[\frac{d\mu(k')}{d\mu(k)}\right]^{\frac{1}{2}} \phi(a^{-1}b). \tag{3.40}$$

Le equazioni sopra scritte definiscono la rappresentazione indotta $V = \mathrm{ind}(R)$. Si ottiene così il teorema di imprimitività:

Teorema 9 *Sia dato un sistema di imprimitività transitivo composto da un gruppo localmente compatto $\mathcal{G}$ con una base numerabile, una sua rappresentazione unitaria continua $a \to V(a)$, uno spazio omogeneo $\mathcal{S}$ ed una misura spettrale $E(I)$ su $\mathcal{S}$ che soddisfa alla condizione* (3.16)*. Scegliamo un elemento q di S e consideriamo il sottogruppo chiuso H_q di $\mathcal{G}$ definito dalla condizione $\Lambda(a)q = q$. Esistono allora una rappresentazione unitaria continua R di H_q ed una misura positiva quasi invariante μ su $\mathcal{S}$ tali che V è unitariamente equivalente alla rappresentazione indotta* $\mathrm{ind}(R)$ *definita dalla equazione* (3.40)*. Tale rappresentazione agisce su di uno spazio di funzioni definite su $\mathcal{G}$ a valori nello spazio di R, che soddisfano alla relazione di covarianza* (3.38)*. La norma in questo spazio è definita dalla eq.* (3.36)*.*

Da un'analisi più dettagliata segue che le scelte dell'elemento rappresentativo q e dell'elemento c_0 sono irrilevanti, nel senso che scelte diverse danno luogo a rappresentazioni unitariamente equivalenti.

In certi casi è più utile scrivere la rappresentazione indotta nella forma introdotta da Wigner [43]. Per ogni punto $k \in \mathcal{S}$ scegliamo un elemento $a_k \in \mathcal{G}$ con la proprietà $k = \Lambda(a_k)q$. Si noti che se $k' = \Lambda(a^{-1})k$, si ha $a_k^{-1} a a_{k'} \in H_q$. Introducendo la nuova funzione

$$\hat{\phi}(k) = \phi(a_k), \tag{3.41}$$

si ha

$$[V(a)\hat{\phi}](k) = \left[\frac{d\mu(k')}{d\mu(k)}\right]^{\frac{1}{2}} \phi(a^{-1}a_k) \tag{3.42}$$

ed usando la relazione di covarianza si ottiene la seguente proprietà di trasformazione per $\hat{\phi}$

$$[V(a)\hat{\phi}](k) = \left[\frac{d\mu(k')}{d\mu(k)}\right]^{\frac{1}{2}} R(a_k^{-1} a a_{k'})\hat{\phi}(k'). \tag{3.43}$$

Questa formula si può ricavare molto più direttamente se si ammette che la eq. (3.27) valga per ogni valore di k. Basta operare nella eq. (3.26) la sostituzione

$$\psi(k) = Q(a_k, k)\hat{\phi}(k) \tag{3.44}$$

e notare che dalla (3.27) segue

$$Q(a_k, k)^{-1}Q(a, k)Q(a_{k'}, k') = Q(a_k^{-1}aa_{k'}, q) = R(a_k^{-1}aa_{k'}). \tag{3.45}$$

3.3 Rappresentazioni unitarie di un prodotto semidiretto.

Ora vogliamo mostrare come il teorema SNAG (Teorema 8) ed il teorema dell'imprimitività (Teorema 9), descritti nelle Sezioni precedenti permettono di trovare le r.u.i. di un prodotto semidiretto localmente compatto. Ricordiamo che un gruppo $\mathcal{G}$ è un *prodotto semidiretto* quando esso è generato da due sottogruppi chiusi $\mathcal{T}$ e $\mathcal{R}$ che hanno in comune solo l'unità e $\mathcal{T}$ è normale. In queste condizioni ogni elemento $r \in \mathcal{G}$ si può esprimere in un solo modo come il prodotto di un elemento $x \in \mathcal{T}$ e di un elemento $a \in \mathcal{R}$; inoltre $\mathcal{R}$ è isomorfo al gruppo quoziente $\mathcal{G}/\mathcal{T}$. Supponiamo anche che $\mathcal{T}$ sia commutativo e che $\mathcal{G}$ sia localmente compatto con una base numerabile.

Ogni elemento $a \in \mathcal{R}$ genera un automorfismo di $\mathcal{T}$ nel modo seguente

$$\Lambda(a)x = axa^{-1}. \tag{3.46}$$

Se introduciamo per denominare gli elementi di $\mathcal{G}$ la notazione $r = xa = (x, a)$, possiamo scrivere le operazioni del gruppo nella forma

$$(x, a)(x', a') = (x + \Lambda(a)x', aa'), \qquad (x, a)^{-1} = (-\Lambda(a^{-1})x, a^{-1}), \tag{3.47}$$

dove per il gruppo $\mathcal{T}$ si è usata la notazione additiva.

Restringiamo la rappresentazione $U(x, a)$ al sottogruppo abeliano $\mathcal{T}$ ed utilizziamo il Teorema 8 (SNAG) per scrivere la rappresentazione spettrale

$$U(x) = U(x, 1) = \int_{\hat{\mathcal{T}}} k(x)\, dE(k), \tag{3.48}$$

dove $k(x)$ sono i caratteri (cioè le r.u.i.) di $\mathcal{T}$, che appartengono a $\hat{\mathcal{T}}$, il gruppo duale di $\mathcal{T}$. Il gruppo $\mathcal{R}$ agisce su $\hat{\mathcal{T}}$ nel seguente modo

$$[\hat{\Lambda}(a)k](x) = k(\Lambda(a^{-1})x). \tag{3.49}$$

Se poniamo

$$U(x, a) = U(x)V(a), \qquad V(a) = U(0, a), \tag{3.50}$$

abbiamo

$$V(a)U(x)V(a)^{-1} = U(\Lambda(a)x) \tag{3.51}$$

e dunque

$$V(a)\int_{\hat{\mathcal{T}}} k(x)\, dE(k)\ V(a)^{-1} = \int_{\hat{\mathcal{T}}} [\hat{\Lambda}(a^{-1})k](x)\, dE(k). \tag{3.52}$$

Consideriamo la funzione caratteristica $f_I(k)$ e la sua rappresentazione di Fourier

$$f_I(k) = \int_{\mathcal{T}} k(x)\tilde{f}_I(x)\, d\mu(x), \tag{3.53}$$

moltiplichiamo entrambi i membri della equazione precedente per $\tilde{f}_I(x)$ ed integriamo rispetto alla misura $d\mu(x)$. In tal modo otteniamo

$$V(a)\int_{\hat{\mathcal{T}}} f_I(k)\, dE(k)\ V(a)^{-1} = \int_{\hat{\mathcal{T}}} f_I(\hat{\Lambda}(a^{-1})k)\, dE(k). \tag{3.54}$$

cioè

$$V(a)E(I)V(a^{-1}) = E(\hat{\Lambda}(a)I). \tag{3.55}$$

Questa è la formula (3.16) che definisce un sistema di imprimitività sullo spazio $\hat{\mathcal{T}}$ rispetto alla rappresentazione V di $\mathcal{R}$.

Allo scopo di ottenere rappresentazioni irriducibili, supporremo che la misura spettrale E sia concentrata in un'orbita $S \subset \hat{\mathcal{T}}$. Indichiamo con q un punto qualunque dell'orbita e con $H_q \subset \mathcal{R}$ il corrispondente sottogruppo stabilizzatore. Segue dal Teorema 9 che la rappresentazione $V(a)$ ha la forma (3.40) o (3.43), mentre la rappresentazione $U(x)$ nell'integrale diretto prende la forma

$$[U(x)\phi](k) = k(x)\phi(k). \tag{3.56}$$

In conclusione, si ha

$$[U(x,a)\phi](b) = k(x)\left[\frac{d\mu(k')}{d\mu(k)}\right]^{\frac{1}{2}} \phi(a^{-1}b), \tag{3.57}$$

oppure

$$[U(x,a)\hat{\phi}](k) = k(x)\left[\frac{d\mu(k')}{d\mu(k)}\right]^{\frac{1}{2}} R(a_k^{-1}aa_{k'})\hat{\phi}(k'), \tag{3.58}$$

dove la funzione ϕ soddisfa alla condizione di covarianza (3.38).

In alcuni casi è utile esprimere l'intera rappresentazione $U(x,a)$ di $\mathcal{G}$ come una rappresentazione indotta. Basta utilizzare il sottogruppo $\tilde{H}_q$ composto da tutti gli elementi del tipo (y,b) con $y \in \mathcal{T}$ e $b \in \tilde{H}_q$, con la sua rappresentazione $(y,b) \to q(y)R(b)$. La rappresentazione indotta che si ottiene in questo modo agisce sulle funzioni $\tilde{\phi}(x,a)$ che soddisfano alla relazione di covarianza

$$\tilde{\phi}((x,a)(y,b)^{-1}) = q(y)R(b)\tilde{\phi}(x,a), \qquad b \in H_q \tag{3.59}$$

ed ha la forma

$$[U(x,a)\tilde{\phi}](y,b) = \left[\frac{d\mu(k')}{d\mu(k)}\right]^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}((x,a)^{-1}(y,b)). \tag{3.60}$$

Per dimostrare l'equivalenza con le formule (3.38) e (3.57), basta porre

$$\phi(a) = \tilde{\phi}(0,a), \tag{3.61}$$

$$\tilde{\phi}(x,a) = q(-\Lambda(a^{-1})x)\phi(a). \tag{3.62}$$

3.4 Sistemi di covarianza.

Si è visto nella Sezione 1.5 che una osservabile generalizzata con valori nello spazio S si può rappresentare con una misura su S a valori operatoriali positivi (POVM) con le proprietà (1.96). Se un gruppo di simmetria $\mathcal{G}$ agisce con continuità su S con le applicazioni $\Lambda(r)$ e sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ con la rappresentazione unitaria $U(r)$, è naturale assumere la condizione

$$U(r)\tau(I)U(r)^{-1} = \tau(\Lambda(r)I), \qquad r \in \mathcal{G}, \tag{3.63}$$

simile alla condizione (3.16) che caratterizza un sistema di imprimitività. In questa situazione si dice che la POVM τ e la rappresentazione U formano un *sistema di covarianza* [28, 29].

Consideriamo una rappresentazione V di $\mathcal{G}$ in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}'$ ed un operatore di allacciamento $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, cioè un operatore limitato con la proprietà

$$V(r)A = AU(r) \tag{3.64}$$

ed una misura spettrale $E(I)$ che, assieme alla rappresentazione V forma un sistema di imprimitività, cioè soddisfa alla condizione (3.16). Si vede facilmente che la POVM definita da

$$\tau(I) = A^* E(I) A \tag{3.65}$$

assieme alla rappresentazione V forma un sistema di cavarianza. Questa POVM è normalizzata se

$$\tau(S) = A^* A = 1, \tag{3.66}$$

cioè se l'operatore A è isometrico. In questo caso si può considerare $\mathcal{H}$ come un sottospazio di $\mathcal{H}'$ ed $A^* = P$ è il proiettore su $\mathcal{H}$.

Questa osservazione, assieme al teorema di imprimitività (Teorema 9), permette di costruire tutti i possibili sistemi di covarianza. Infatti si vede che [52–55]

Teorema 10 *Dato un sistema di covarianza composto dalla POVM τ e dalla rappresentazione U agenti nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, è sempre possibile trovare un sistema di imprimitività composto dalla misura spettrale E e della rappresentazione V agenti nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}'$ ed un operatore di allacciamento A in modo che il sistema di covarianza dato è unitariamente equivalente a quello costruito con il procedimento sopra descritto.*

Per dimostrare questo risultato consideriamo lo spazio lineare $\mathcal{E}$ costituito dalle funzioni di Borel $\Psi : S \to \mathcal{H}$ che assumono un numero finito di valori. Indichiamo con $I_i \subset S$ l'insieme di Borel in cui $\Psi(x) = \psi_i$. Analogamente, se $\Phi \in \mathcal{E}$ indichiamo con J_j l'insieme in cui $\Phi(x) = \phi_j$. La formula

$$(\Phi, \Psi)' = \sum_{ij} (\phi_j, \tau(J_j \cap I_i)\psi_i) \tag{3.67}$$

definisce una forma sesquilineare non negativa, come si vede facilmente dalle proprietà di additività e di positività di τ. Pertanto $\mathcal{E}$ è uno spazio pre-hilbertiano.

Su di $\mathcal{E}$ agisce la rappresentazione lineare V' definita da

$$[V'(r)\Psi](x) = U(r)\Psi(\Lambda(r)^{-1}x) \tag{3.68}$$

e dalla eq. (3.63) segue

$$(V'(r)\Phi, V'(r)\Psi)' = (\Phi, \Psi)'. \tag{3.69}$$

Consideriamo l'operatore $A' : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$ che fa corrispondere a $\psi \in \mathcal{H}$ la funzione costante $\Psi(x) = \psi$. Si ha

$$(A'\phi, A'\psi)' = (\phi, \tau(S)\psi) \tag{3.70}$$

e dunque se la misura τ è normalizzata A' è isometrico e comunque esso è limitato. Inoltre si vede che

$$V'(r)A' = A'U(r). \tag{3.71}$$

Introduciamo poi nello spazio $\mathcal{E}$ gli operatori $E'(I)$ definiti da

$$[E'(I)\Psi](x) = f_I(x)\Psi(x), \tag{3.72}$$

dove f_I è la funzione caratteristica dell'insieme boreliano $I \in S$. Essi sono limitati ed hanno le proprietà

$$E'(I)^2 = E'(I), \qquad (E'(I)\Phi, \Psi)' = (\Phi, E'(I)\Psi)', \tag{3.73}$$

$$E'(\bigcup_i I_i) = \sum_i E'(I_i), \tag{3.74}$$

dove $\{I_i\}$ è un insieme numerabile di insiemi boreliani disgiunti. Inoltre si ha

$$V'(r)E'(I) = E'(\Lambda(r)I)V'(r), \tag{3.75}$$

$$(A'\phi, E'(I)A'\psi)' = (\phi, \tau(I)\psi). \tag{3.76}$$

Indichiamo con $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ il sottospazio lineare contenente gli elementi con la proprieà $(\Psi, \Psi) = 0$ e costruiamo lo spazio quoziente $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$. La forma sesquilineare $(.,.)'$ definisce per passaggio al quoziente un prodotto scalare $(.,.)$ in $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ e completando si ottiene lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}'$. Gli operatori $V'(r)$ ed $E'(I)$ definiscono per passaggio al quoziente operatori limitati nello spazio $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ che si estendono per continuità agli operatori $V(r)$ e $E(I)$ nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}'$. I primi formano una rappresentazioni unitaria di $\mathcal{G}$ ed i secondi formano una misura spettrale su S. L'operatore A' definisce per passaggio al quoziente un operatore $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$.

Dalla eq. (3.71) si ottiene la (3.64) e dalla eq. (3.76) si ottiene la eguaglianza

$$(A\phi, E(I)A\psi) = (\phi, \tau(I)\psi), \tag{3.77}$$

che è equivalente alla (3.65). Dalla eq. (3.75) segue la (3.16).

3.5 Generatori delle rappresentazioni unitarie.

Consideriamo ora le rappresentazioni di un gruppo di Lie reale $\mathcal{G}$. Se $r \to D(r)$ è una rappresentazione (non necessariamente unitaria) in uno spazio complesso di dimensione n finita, essa è un omomorfismo di $\mathcal{G}$ nel gruppo lineare $L(n, \mathbf{C})$. Ad esso corrisponde un omomorfismo tra le algebre di Lie $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ e $l(n, \mathbf{C})$ (considerata come algebra reale), che è una rappresentazione n-dimensionale di $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, che indicheremo ancora con $a \to D(a)$. In altre parole si ha

$$D([a,b]) = D(a)D(b) - D(b)D(a), \qquad a, b \in \mathcal{L}(\mathcal{G}). \tag{3.78}$$

D'altra parte, data una rappresentazione n-dimensionale di $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, si può costruire un omomorfismo locale $\mathcal{G} \to L(n, \mathbf{C})$, che può essere esteso ad un omomorfismo globale se $\mathcal{G}$ è semplicamente connesso.

Le cose sono più complicate se si considera una rappresentazione $r \to U(r)$ in uno spazio di dimensione infinita. Considereremo solo rappresentazioni unitarie in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Se $a \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$, possiamo considerare il sottogruppo ad un parametro $t \to \exp(ta)$ ed il teorema di Stone [12] ci assicura che

$$U(\exp(ta)) = \exp(-itF(a)), \tag{3.79}$$

dove $F(a)$ è un operatore autoaggiunto, in generale non limitato. Si dice che gli operatori $F(a)$ sono i *generatori* della rappresentazione U. Possiamo dunque al massimo sperare che che la relazione

$$(F(a)F(b) - F(b)F(a))\psi = iF([a,b])\psi \tag{3.80}$$

valga per $\psi \in \mathcal{D}$, dove $\mathcal{D}$ è un sottospazio lineare denso in $\mathcal{H}$.

Una possibile scelta di $\mathcal{D}$ è lo spazio di Gårding [16, 56], composto da tutti i vettori ψ tali che $U(r)\psi$ è una funzione infinitamente differenziabile di $r \in \mathcal{G}$. Allora si può porre

$$F(a)\psi = i \left(\frac{d}{dt} U(\exp(ta)) \right)_{t=0} \tag{3.81}$$

e si vede che tutti gli operatori $F(a)$ trasformano $\mathcal{D}$ in se stesso, in modo che qualunque prodotto di questi operatori è definito in $\mathcal{D}$. Si vede anche che la realazione (3.80) è soddisfatta per $\psi \in \mathcal{D}$.

Dobbiamo mostrare che $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{H}$. A tale scopo notiamo che $\mathcal{D}$ contiene i vettori del tipo

$$\psi' = \int_{\mathcal{G}} f(s) U(s) \psi \, ds, \tag{3.82}$$

dove f è una funzione infinitamente differenziabile con supporto compatto e ds è una misura invariante a sinistra sul gruppo. Infatti, si può scrivere

$$U(r)\psi' = \int_{\mathcal{G}} f(r^{-1}s) U(s) \psi \, ds. \tag{3.83}$$

Consideriamo una base $\{I_n\}$ di intorni dell'unità ed una successione $\{f_n\}$ di funzioni infinitamente differenziabili nulle fuori di I_n e normalizzate in modo che

$$\int_{\mathcal{G}} f(s) \, ds = 1. \tag{3.84}$$

Siccome $U(s)\psi$ è una funzione continua di s, si vede facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{G}} f_n(s) U(s) \psi \, ds = \psi, \tag{3.85}$$

dunque ogni elemento di $\mathcal{H}$ è il limite di una successione di vettori appartenenti a $\mathcal{D}$.

In alcuni problemi è utile considerare uno spazio $\mathcal{D}$ più piccolo di quello di Gårding, che contiene i vettori tali che $U(r)\psi$ sia una funzione analitica di r, cioè sviluppabile in serie di potenze in un intorno di ogni punto di $\mathcal{G}$. I vettori di questo tipo si dicono *analitici* rispetto alla rappresentazione U. Per mostrare che essi sono densi in $\mathcal{H}$ si può procedere come sopra, utilizzando funzione $f(s)$ analitiche. Non si può però richiedere che esse abbiano supporto compatto e dunque è più difficile (ma possibile [56]) trovare una successione $\{f_n\}$ con la proprietà (3.85).

Dato un operatore F nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, si dice che un vettore ψ è *analitico* rispetto ad F se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|F^n \psi\| t^n \tag{3.86}$$

ha un raggio di convergenza positivo. Nello stesso cerchio di convergenza converge anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-itF)^n \psi = \exp(-itF)\psi. \tag{3.87}$$

Se F è limitato, tutti i vettori di $\mathcal{H}$ sono analitici. Se F è autoaggiunto e $E(I)$ è il suo proiettore spettrale corrispondente al segmento I, i vettori del tipo $E(I)\psi$ sono analitici. Segue che i vettori analitici sono densi in $\mathcal{H}$. D'altra parte, si dimostra che se l'operatore hermitiano F ha un insieme denso di vettori analitici, la sua chiusura $\overline{F} = F^*$ è autoaggiunta, cioè si ha $F^* = F^{**}$. Si dice anche che esso è *essenzialmente autoaggiunto.*

Utilizzando i vettori analitici, si può dimostrare il seguente risultato [56]

Teorema 11 *Siano $\mathcal{G}$ un gruppo di Lie semplicemente connesso ed $F(a)$ degli operatori hermitiani che dipendono linearmente da $a \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ e sono definiti su di uno spazio lineare denso invariante $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$. Supponiamo che sia soddisfatta la condizione* (3.80) *e che, se $\{a_i\}$ è una base dell'algebra di Lie $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, l'operatore*

$$H = \sum_i F(a_i)^2 \tag{3.88}$$

sia essenzialmente autoaggiunto. Allora gli operatori $F(a)$ sono i generatori di una rappresentazione unitaria continua di $\mathcal{G}$.

3.6 Il gruppo di Weyl-Heisenberg e la quantizzazione canonica.

In questa Sezione utilizziamo gli strumenti introdotti nelle Sezioni precedenti, ed in particolare il teorema di imprimitività, per discutere la rappresentazione in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ delle *relazioni di commutazione canoniche*

$$[Q_i, Q_k] = 0, \qquad [P_i, P_k] = 0, \qquad [Q_i, P_k] = i\hbar\delta_{ik},$$
$$i, k = 1, \cdots, n. \tag{3.89}$$

Abbiamo scritto esplicitamente la costante $\hbar$ per chiarire il suo significato gruppale. Gli operatori Q_i e P_k non sono limitati e le relazioni di commutazione hanno senso in un opportuno sottospazio lineare $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ non meglio specificato, più ristretto del sottospazio lineare in cui questi operatori sono autoaggiunti. Questo rende il problema della loro determinazione abbastanza mal definito [56] e, seguendo H. Weyl [38], è opportuno riformularlo in un altro modo.

Consideriamo gli operatori $-iQ_i$ e $-iP_k$ come una rappresentazione di una algebra di Lie astratta avente una base composta dagli elementi u, $\{q_i\}$, $\{p_k\}$, che soddifano alle relazioni

$$[q_i, q_k] = 0, \qquad [p_i, p_k] = 0, \qquad [q_i, p_k] = \delta_{ik}u,$$
$$[u, q_i] = 0, \qquad [u, p_k] = 0. \tag{3.90}$$

Si tratta di una estensione centrale di un'algebra di Lie commutativa i cui elementi si possono interpretare come tralsazioni infinitesime dello spazio delle fasi. L'elemento u commuta con tutti gli elementi dell'algebra (appartiene al suo centro) e dunque in una rappresentazione irriducibile esso è rappresentato da un operatore moltiplicativo numerico $-i\hbar$. Il corrispondente gruppo $\mathcal{G}$ (supposto semplicemente connesso) è una estensione centrale $\mathcal{G}$ del gruppo delle traslazioni nello spazio delle fasi.

Vediamo che una possibile descrizione del gruppo $\mathcal{G}$ si ottiene usando per i suoi elementi la notazione $r = (\eta, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ e la legge di composizione

$$(\eta, \mathbf{a}, \mathbf{b})(\eta', \mathbf{a}', \mathbf{b}') = (\eta + \eta' + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}' - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}'), \mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b} + \mathbf{b}'), \tag{3.91}$$

dove abbiamo introdotto i vettori $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ ed indicato con $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ il loro prodotto scalare. Questo gruppo è anche uno spazio vettoriale ed i suoi sottogruppi ad un parametro sono le rette passanti per l'origine. Dunque la sua algebra di Lie si ottiene definendo sullo stesso spazio vettoriale il commutatore

$$[(\eta, \mathbf{a}, \mathbf{b}), (\eta', \mathbf{a}', \mathbf{b}')] = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}' - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}', \mathbf{0}, \mathbf{0}). \tag{3.92}$$

Se si introduce una base composta dagli elementi u, $(p_1, \ldots, p_n) = \mathbf{p}$ e $(q_1, \ldots, q_n) = \mathbf{q}$, in modo che

$$(\eta, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \eta u + \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{q}, \tag{3.93}$$

si ottengono proprio i commutatori (3.90).

Il problema di trovare le rappresentazioni delle relazioni di commutazione canoniche è dunque ricondotto alla costruzione di una rappresentazione unitaria di $\mathcal{G}$. Gli operatori Q_i e P_k sono i generatori della rappresentazione (vedi Sezione 3.5) e le relazioni di commutazione (3.89) sono valide nello spazio di Gårding o nello spazio dei vettori analitici. Una rappresentazione unitaria di $\mathcal{G}$ si può scrivere nella forma

$$U(0, \mathbf{a}, \mathbf{0}) = \exp(-i \sum_i a_i P_i), \qquad U(0, \mathbf{0}, \mathbf{b}) = \exp(-i \sum_k b_k Q_k), \tag{3.94}$$

$$U(\eta, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \exp(-i\hbar\eta). \tag{3.95}$$

In particolare si ha

$$\begin{aligned} \exp(-i \sum_i b_i Q_i) \exp(-i \sum_k a_k P_k) \exp(i \sum_i b_i Q_i) \exp(i \sum_k a_k P_k) = \\ = \exp(-i\hbar \sum_j a_j b_j). \end{aligned} \tag{3.96}$$

Questa equazione, dovuta a Weyl [38], si può considerare come una formulazione matematicamente più precisa delle relazioni di commutazione canoniche (3.89). L'estensione centrale $\mathcal{G}$ del gruppo delle traslazioni nello spazio delle fasi è detta *gruppo di Weyl-Heisenberg* e la quantizzazione canonica consiste nel trovare le r. u. i. di questo gruppo. Vediamo ora che, se il numero n di gradi di libertà è finito, il gruppo di Weyl-Heisenberg ha una sola classe di equivalenza di r. u. i. di questo tipo, per ogni scelta di $\hbar > 0$. Questo importante risultato è dovuto a Stone ed a von Neumann [57].

Osserviamo che $\mathcal{G}$ è il prodotto semidiretto di un sottogruppo commutativo normale $\mathcal{T}$ formato dagli elementi del tipo $(\eta, \mathbf{a}, \mathbf{0}) = (\eta, \mathbf{a})$ e del sottrogruppo $\mathcal{R}$ formato dagli elementi del tipo $(0, \mathbf{0}, \mathbf{b}) = \mathbf{b}$. Il sottogruppo $\mathcal{R}$ opera su $\mathcal{T}$ nel seguente modo:

$$\Lambda(\mathbf{b})(\eta, \mathbf{a}) = (0, \mathbf{0}, \mathbf{b})(\eta, \mathbf{a}, \mathbf{0})(0, \mathbf{0}, -\mathbf{b}) = (\eta + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a}). \tag{3.97}$$

I caratteri di $\mathcal{T}$ hanno la forma

$$k(\eta, \mathbf{a}) = \exp(-i\hbar\eta - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}). \tag{3.98}$$

Essi formano il gruppo duale $\hat{\mathcal{T}}$ e possiamo usare per essi la notazione $k = (\hbar, \mathbf{k})$. $\mathcal{R}$ agisce su di essi nel seguente modo

$$[\hat{\Lambda}(\mathbf{b})k](\eta, \mathbf{a}) = k(\eta - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a}) = \exp(-i\hbar\eta - i(\mathbf{k} - \hbar\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}), \tag{3.99}$$

cioè, con la notazione che abbiamo introdotto,

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{b})(\hbar, \mathbf{k}) = (\hbar, \mathbf{k} - \hbar\mathbf{b}). \tag{3.100}$$

Vediamo che $\hbar$ è costante sulle orbite e, se fissiamo $\hbar > 0$, esiste una sola orbita in cui $\mathbf{k}$ può prendere valori arbitrari. Scegliamo l'elemento rappresentativo $q = (\hbar, \mathbf{0})$ e vediamo che il gruppo piccolo H_q contiene solo l'unità ed ha solo la rappresentazione banale. Pertanto esiste una sola possibile rappresentazione indotta molto semplice del tipo

$$[U(0, \mathbf{a}, \mathbf{0})\tilde{\psi}](\mathbf{k}) = \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})\tilde{\psi}(\mathbf{k}), \tag{3.101}$$

$$[U(0, \mathbf{0}, \mathbf{b})\tilde{\psi}](\mathbf{k}) = \tilde{\psi}(\mathbf{k} + \hbar\mathbf{b}). \tag{3.102}$$

Confrontando con la (3.94) si ottengono le formule ben note della *rappresentazione dei momenti*:

$$P_i\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = k_i\tilde{\psi}(\mathbf{k}), \qquad Q_i\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial k_i}\tilde{\psi}(\mathbf{k}). \tag{3.103}$$

Nella trattazione precedente si sarebbe potuto scambiare il ruolo delle P_i e delle Q_i ottenendo la *rappresentazione di Schrödinger*:

$$[U(0, \mathbf{a}, \mathbf{0})\psi](\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \hbar\mathbf{a}), \tag{3.104}$$

$$[U(0, \mathbf{0}, \mathbf{b})\psi](\mathbf{x}) = \exp(-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\psi(\mathbf{x}), \tag{3.105}$$

$$P_i\psi(\mathbf{x}) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}\psi(\mathbf{x}), \qquad Q_i\psi(\mathbf{x}) = x_i\psi(\mathbf{x}). \tag{3.106}$$

Per controllare che essa è unitariamente equivalente a quella precedente, basta porre

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int \exp(-i\hbar^{-1}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x}. \tag{3.107}$$

Se si considera un sistema con infiniti gradi di libertà, i risultati sopra ottenuti non sono più validi. Infatti, in questo caso i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ appartengono ad uno spazio vettoriale topologico di dimensione infinita, che non può mai essere localmente compatto. Per esempio, nelle teorie quantistiche di campo si hanno molte rappresentazioni non equivalenti delle relazioni di commutazione canoniche.