Introduzione a GRUPPI ED ALGEBRE IN MECCANICA QUANTISTICA.

M. Toller

1999

Capitolo 4

Gruppi di simmetria spazio-temporale.

4.1 Il gruppo di Galilei.

Le simmetrie spazio-temporali nella fisica non relativistica costituiscono il *gruppo di Galilei* e nella fisica relativistica formano il *gruppo di Poincaré*. Entrambi sono gruppi di Lie a 10 dimensioni. In questo capitolo studiamo le loro proprietà geometriche, le loro algebre di Lie, le loro estensioni centrali e le loro rappresentazioni fisicamente rilevanti. Entrambi contengono il gruppo ad un parametro delle *traslazioni temporali*, che descrive l'evoluzione temporale del sistema (vedi sezione 1.1) ed il *gruppo euclideo tridimensionale*, che è un gruppo di Lie a 6 dimensioni, prodotto semidiretto del gruppo delle *traslazioni spaziali* e del gruppo $O(3)$ delle *rotazioni*. Inoltre essi contengono, rispettivamente, le trasformazioni di Galilei o di Lorentz *pure*, che introducono una differenza di velocità tra due sistemi.

È conveniente considerare questi gruppi come gruppi di trasformazioni agenti sulla coordinata temporale t e sulle coordinate cartesiane x^1, x^2, x^3, dello spazio, che sono le componenti di un vettore $\vec{x}$. Queste quattro coordinate individuano un evento e l'insieme di tutti gli eventi è lo *spazio-tempo*. Si può associare un sistema di coordinate ad ogni osservatore ed una trasformazione di coordinate individua una operazione di simmetria interpretata in senso passivo. Alla stessa trasformazione può essere data una interpretazione attiva, considerandola come una trasformazione del sistema fisico.

Le formule che seguono descrivono l'effetto di una trasformazione attiva sulle grandezze classiche t ed $\vec{x}$. Per esempio, le trasformazioni del gruppo euclideo si possono scrivere nella forma

$$\vec{x'} = \vec{y} + R\vec{x}, \tag{4.1}$$

dove $\vec{y}$ è un vettore che rappresenta la traslazione ed R è una matrice ortogonale tridimensionale (cioè un elemento di $O(3)$) che descrive la rotazione; essa agisce sui vettori considerati come matrici ad una colonna.

Le trasformazioni del gruppo di Galilei coinvolgono anche il tempo e si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} t' &= \tau + t, \\ \vec{x'} &= \vec{y} + t\vec{v} + R\vec{x}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

dove il vettore $\vec{v}$ rappresenta la velocità relativa dei due riferimenti e τ rappresenta la traslazione nel tempo. Questa formula si può scrivere come un prodotto di matrici 5×5 (a blocchi) nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t' \\ \vec{x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ \vec{y} & \vec{v} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Se si rappresenta questa trasformazione con il simbolo $(\tau, \vec{y}, \vec{v}, R)$, la legge di composizione di due trasformazioni si ottiene dal prodotto delle rispettive matrici ed è data da

$$(\tau, \vec{y}, \vec{v}, R)(\tau', \vec{y'}, \vec{v'}, R') = (\tau + \tau', \vec{y} + \vec{v}\tau' + R\vec{y'}, \vec{v} + R\vec{v'}, RR'). \tag{4.4}$$

La varietà del gruppo è diffeomorfa al prodotto $O(3) \times \mathbf{R}^7$. Se imponiamo la condizione $\det R = 1$, cioè $R \in SO(3)$, otteniamo un sottogruppo connesso detto gruppo *proprio* di Galilei. Infatti, il gruppo $SO(3)$ delle rotazioni proprie è connesso, come si vede dalla sua parametrizzazione per mezzo degli angoli di Eulero:

$$R = \exp(\phi r^3) \exp(\theta r^1) \exp(\psi r^3), \tag{4.5}$$

dove abbiamo introdotto le matrici

$$r^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

che formano una base dell'algebra di Lie $o(3)$ di $SO(3)$. Si può anche usare la parametrizzazione esponenziale

$$R = \exp(\vec{\alpha} \cdot \vec{r}), \qquad \|\vec{\alpha}\| \leq \pi, \qquad \vec{r} = (r^1, r^2, r^3), \tag{4.7}$$

notando però che se $\|\vec{\alpha}\| = \pi$, i due vettori $\vec{\alpha}$ e $-\vec{\alpha}$ rappresentano lo stesso elemento del gruppo.

Si vede da questa parametrizzazione che $SO(3)$ non è semplicemente connesso. Nella prossima sezione vedremo che il suo ricoprimento universale è il gruppo $SU(2)$ delle matrici unitarie bidimensionali con determinante 1. Ne segue che anche il gruppo proprio di Galilei non è semplicemente connesso e che il suo ricoprimento universale si ottiene rimpiazzando $SO(3)$ con $SU(2)$.

Le trasformazioni infinitesime sono descritte da matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ \vec{y} & \vec{v} & \vec{\omega} \cdot \vec{r} \end{pmatrix} = -\tau h + \vec{y} \cdot \vec{p} + \vec{v} \cdot \vec{n} + \vec{\omega} \cdot \vec{m}. \tag{4.8}$$

Abbiamo indicato con m^i le matrici 5×5 che contengono le r^i come unico blocco non nullo. Esse rappresentano le rotazioni infinitesime attorno agli assi. In modo analogo la formula (4.8) definisce implicitamente le matrici n^1, n^2, n^3 che rappresentano trasformazioni di Galilei pure lungo gli assi, le matrici p^1, p^2, p^3 che rappresentano le traslazioni spaziali infinitesime lungo gli assi spaziali, e la matrice $-h$ che rappresenta le traslazioni temporali (attive).

Queste matrici definiscono una base nell'algebra di Lie del gruppo di Galilei. Le loro relazioni di commutazione si calcolano direttamente e sono date dalle formule seguenti.

$$[h, p^i] = 0, \qquad [p^i, p^k] = 0 \tag{4.9}$$

(le traslazioni formano un gruppo abeliano),

$$\begin{gathered} [m^i, h] = 0, \qquad [m^i, m^j] = e^{ijk} m^k, \\ [m^i, p^j] = e^{ijk} p^k, \qquad [m^i, n^j] = e^{ijk} n^k \end{gathered} \tag{4.10}$$

(queste formule mostrano le proprietà di trasformazione, scalare o vettoriale, dei vari elementi ripetto alla rappresentazione aggiunta ristretta alle rotazioni),

$$[h, n^k] = p^k, \qquad [n^i, n^k] = 0, \qquad [n^i, p^k] = 0. \tag{4.11}$$

Tutti gli indici prendono i valori 1, 2, 3 ed è sottintesa la somma sugli indici ripetuti; e^{ijk} è il simbolo di Ricci antisimmetrico rispetto ai tre indici con $e^{123} = 1$. La rappresentazione dell'algebra di Lie per mezzo di matrici 5×5 è utile per i calcoli espliciti, ma è spesso più opportuno definire l'algebra in modo astratto per mezzo delle relazioni di commutazione sopra scritte.

Notiamo che tutti gli elementi della base meno l'elemento h si possono esprimere come commutatori di altri elementi. Ne segue che i cocicli di grado uno sono funzionali lineari che si annullano su tutti gli elementi della base meno che su h. Dato che non esistono cobordi non nulli di grado uno, $H^1 = Z^1$ è unidimensionale; il suo significato fisico è che tra i generatori del gruppo di Galilei, solo l'energia contiene una costante additiva non determinata.

Riguardo ai cocicli di grado 2, possiamo limitarci a considerare quelli invarianti per rotazioni, come abbiamo visto nella sezione 2.3. Le relazioni di commutazione sopra scritte mostrano che i generatori p^i, n^i, m^i si comportano riguardo alle rotazioni come le componenti di un vettore, mentre h si comporta come uno scalare. Se si tien conto delle equazioni (2.97) e (2.98), si vede che un cociclo invariante deve avere la proprietà

$$\alpha(n^k, p^i) = -\alpha(p^i, n^k) = -m\delta^{ik}, \tag{4.12}$$

dove m è un numero reale, ed annullarsi se gli argomenti sono elementi di base di altro tipo. Ne segue che H^2 è unidimensionale e che il gruppo ha rappresentazioni proiettive non banali anche dal punto di vista locale.

L'estensione centrale dell'algebra di Lie di Galilei definita dal cociclo sopra descritto si può rappresentare per mezzo di matrici 6×6 ottenute dalle matrici (4.8) aggiungendo una riga ed una colonna:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 & 0 \\ \vec{y} & \vec{v} & \vec{\omega} \cdot \vec{r} & 0 \\ \eta & 0 & -m\vec{v}^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

dove η è la nuova coordinata introdotta nel processo di estensione. È facile vedere che queste matrici soddisfano alla relazione di commutazione (2.77) con α dato dalla eq. (4.12).

Indichiamo con $-iH, -iP^i, -iN^i, -iM^i$, gli operatori anti-hermitiani che rappresentano gli elementi h, p^i, n^i, m^i dell'algebra di Lie. In accordo con la teoria generale, le loro relazioni di commutazione sono:

$$[H, P^i] = 0, \qquad [P^i, P^k] = 0, \qquad [M^i, H] = 0,$$

$$[M^i, M^j] = ie^{ijk}M^k, \qquad [M^i, P^j] = ie^{ijk}P^k, \qquad [M^i, N^j] = ie^{ijk}N^k,$$
$$[H, N^k] = iP^k, \qquad [N^i, N^k] = 0, \qquad [N^i, P^k] = -im\delta^{ik}. \tag{4.14}$$

L'estensione centrale del gruppo di Galilei si può rappresentare con matrici 6×6 della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & 1 & 0 & 0 \\ \vec{y} & \vec{v} & R & 0 \\ \eta & -\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} & -m\vec{v}^{\,T}R & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

Infatti è facile controllare che queste matrici formano un gruppo e che le trasformazioni infinitesime sono date da matrici del tipo (4.13).

Se si rappresenta l'estensione centrale per mezzo degli operatori unitari $\exp(-i\eta)U(\tau, \vec{y}, \vec{v}, R)$, la legge di composizione in vicinanza dell'identità si ricava dal prodotto delle matrici (4.15). Per ottenere l'estensione globale, bisogna rimpiazzare il gruppo $SO(3)$ con $SU(2)$. Se si indica con $R(u) \in SO(3)$ la matrice corrispondente a $u \in SU(2)$, si ottiene così la formula

$$U(\tau, \vec{y}, \vec{v}, u)U(\tau', \vec{y'}, \vec{v'}, u') = \exp(im\vec{v} \cdot R(u)\vec{y'} + \tfrac{i}{2}\tau' m\vec{v}^{\,2})$$
$$U(\tau + \tau', \vec{y} + \vec{v}\tau' + R(u)\vec{y'}, \vec{v} + R(u)\vec{v'}, uu'), \tag{4.16}$$

dove compare la forma esplicita del moltiplicatore.

Come in meccanica classica, i generatori delle trasformazioni infinitesime sono delle importanti osservabili: H è *l'energia*, le P^i sono le componenti della *quantità di moto* e le M^i sono le componenti del *momento angolare*. Si noti che H genera le traslazioni temporali passive, mentre le trasformazioni attive che stiamo considerando sono generate da $-H$. Per trovare il significato delle N^i osserviamo che le grandezze

$$X^i(0) = -\frac{1}{m}N^i \tag{4.17}$$

si trasformano per traslazioni e rotazioni infinitesime esattamente come le coordinate di un punto che chiameremo *baricentro* del sistema a $t = 0$. Le coordinate del baricentro a $t \neq 0$ son determinate dalla equazione di Heisenberg

$$\frac{dX^i(t)}{dt} = -i[X^i(t), H] \tag{4.18}$$

con la condizione iniziale (4.17). Si ottiene

$$X^i(t) = m^{-1}(-N^i + tP^i). \tag{4.19}$$

Si vede che m è il rapporto tra quantità di moto e velocità del baricentro, cioè la *massa* (non relativistica).

Si verifica facilmente che l'operatore

$$V = H - \frac{1}{2m}\vec{P}^{\,2} \tag{4.20}$$

commuta con tutti i generatori del gruppo di Galilei e dunque riguarda solo gradi di libertà *interni*. Se consideriamo un sistema elementare, V deve essere una costante che si può porre eguale a zero ridefinendo H. Segue l'espressione ben nota per l'hamiltoniana della particella libera.

Consideriamo gli operatori

$$S^i = M^i + m^{-1}e^{ijk}N^jP^k, \tag{4.21}$$

che rappresentano il momento angolare rispetto al baricentro. Essi soddisfano alle relazioni

$$[S^i, S^j] = ie^{ijk}S^k \tag{4.22}$$

e dunque generano un'algebra isomorfa a quella delle rotazioni. Inoltre essi commutano con gli operatori H, P^i, N^i, che a loro volta formano una sottoalgebra. Di queste due algebre, la seconda descrive il moto del baricentro e la prima descrive una rotazione del sistema attorno al baricentro, cioè lo *spin*, se si tratta di una particella singola. Nel caso non relativistico le due algebre commutano tra di loro e ciò significa che i due moti non interagiscono. L'operatore $\vec{S}^{\,2}$ commuta con tutti gli altri e dunque in un sistema elementare esso è una costante, che determina lo spin della particella. La trattazione ben nota dell'algebra di Lie delle rotazioni mostra che tale costante può assumere i valori $s(s+1)$ con $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$. Se $2s$ è pari, le rotazioni sono descritte da una rappresentazione unitaria di $SO(3)$, se è dispari si deve utilizzare una rappresentazione unitaria del ricoprimento universale $SU(2)$.

In conclusione, gli esponenti (cocicli) che descrivono le rappresentazioni proiettive del gruppo di Galilei sono individuati dalla massa m e da $(-1)^{2s}$. Siccome ad ogni sottospazio coerente corrisponde un unico moltiplicatore, stati con diversi valori di questi due parametri sono separati da regole di superselezione.

4.2 Il gruppo di Poincaré.

Il gruppo di Galilei lascia invariato l'intervallo temporale $t' - t''$ tra due eventi; infatti, in fisica non relativistica la contemporaneità di due eventi ha un significato assoluto (indipendente dall'osservatore). In fisica relativistica, ciò che è indipendente dall'osservatore è la velocità della luce c; ne segue che le trasformazioni di Poincaré devono lasciare invariato *l'intervallo relativistico*

$$c^2(t' - t'')^2 - (\vec{x'} - \vec{x''}) \cdot (\vec{x'} - \vec{x''}), \tag{4.23}$$

che si annulla quando i due eventi sono connessi da un raggio di luce. Conviene introdurre la matrice ad una colonna e quattro righe x i cui elementi sono $x^0 = ct$ e le tre coordinate spaziali x^1, x^2, x^3. Con questa notazione quadridimensionale, l'intervallo relativistico prende la forma

$$(x' - x'')^T g(x' - x'') = (x' - x'') \cdot (x' - x''), \tag{4.24}$$

dove x^T è la matrice trasposta di x e g è la matrice diagonale i cui elementi non nulli sono, nell'ordine, $1, -1, -1, -1$. Ne segue che le trasformazioni del gruppo di Poincaré devono avere la forma

$$x' = y + \Lambda x, \tag{4.25}$$

dove y è una matrice ad una colonna i cui elementi sono $y^0 = c\tau, y^1, y^2, y^3$ e Λ è una matrice quadrata quadridimensionale che soddisfa alla relazione

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \tag{4.26}$$

Le matrici di questo tipo costituiscono il *gruppo di Lorentz* omogeneo $O(1,3)$. Se si indica un elemento del gruppo di Poincaré col simbolo (y, Λ), la legge di composizione si può scrivere nella forma

$$(y, \Lambda)(y', \Lambda') = (y + \Lambda y', \Lambda\Lambda'). \tag{4.27}$$

Dalla definizione (4.26) segue che $\det\Lambda = \pm 1$ e $|\Lambda^0_0| \geq 1$. Pertanto il gruppo $O(1,3)$ si suddivide in quattro componenti connesse caratterizzate dai segni di $\det\Lambda$ e dell'elemento Λ^0_0. Si possono considerare i seguenti sottogruppi di $O(1,3)$:

- il gruppo di Lorentz *proprio* $SO(1,3)$ definito da $\det\Lambda = 1$;

- il gruppo di Lorentz *ortocrono* $O^{\uparrow}(1,3)$ definito da $\Lambda^0_0 \geq 1$;

- il gruppo di Lorentz *proprio ortocrono* o *ristretto* $SO^{\uparrow}(1,3) = SO(1,3) \cap O^{\uparrow}(1,3)$.

Il gruppo di Lorentz *ristretto* è connesso, come si vede dal fatto che ogni suo elemento si può scrivere nella forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\zeta & 0 & 0 & \sinh\zeta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\zeta & 0 & 0 & \cosh\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R' \end{pmatrix}, \qquad R, R' \in SO(3). \tag{4.28}$$

Le stesse considerazioni topologiche si applicano al gruppo di Poincaré che è diffeomorfo al prodotto di $O(1,3) \times \mathbf{R}^4$. Nel seguito considereremo solo il gruppo di Poincaré ristretto.

Il gruppo $SO^{\uparrow}(1,3)$ non è semplicemente connesso. Per trovare il suo ricoprimento universale, consideriamo per ogni x la matrice hermitiana

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = x^\alpha \sigma_\alpha, \tag{4.29}$$

dove $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le matrici di Pauli e σ_0 è la matrice unità. Siccome si ha $\det \hat{x} = x \cdot x$, data una matrice complessa bidimensionale a con $\det a = 1$, cioè un elemento di $SL(2, \mathbf{C})$, la matrice $\hat{x'} = a \hat{x} a^+$ è hermitiana e si ha $x' \cdot x' = x \cdot x$, cioè esiste una matrice di Lorentz $\Lambda(a)$ tale che $x' = \Lambda(a) x$. Si ha dunque un omomorfismo di $SL(2, \mathbf{C})$ in $O(1,3)$ e si vede facilmente che il nucleo dell'omomorfismo è composto dalle due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

Per studiare le proprietà topologiche di $SL(2, \mathbf{C})$ consideriamo la decomposizione polare

$$a = b \exp c, \qquad c = \tfrac{1}{2} \log(a^+ a). \tag{4.31}$$

Si vede che c è una matrice hermitiana qualunque a traccia nulla e che $b \in SU(2)$. Siccome le matrici hermitiane a traccia nulla formano una varietà diffeomorfa ad $\mathbf{R}^3$, vediamo che $SL(2,\mathbf{C})$ è diffeomorfo al prodotto di $\mathbf{R}^3 \times SU(2)$. Un elemento di $SU(2)$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

con

$$\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = (\Re\alpha)^2 + (\Im\alpha)^2 + (\Re\beta)^2 + (\Im\beta)^2 = 1 \tag{4.33}$$

e dunque $SU(2)$ è diffeomorfo alla sfera tri-dimensionale S_3. Ne segue che $SU(2)$ ed $SL(2,\mathbf{C})$) sono semplicemente connessi.

Rispetto all'omomorfismo $a \to \Lambda(a)$, l'immagine di $SL(2,\mathbf{C})$ è un sottogruppo 6-dimensionale connesso di $O(1,3)$, che si identifica con il sottogruppo ristretto $SO^{\uparrow}(1,3)$, mentre l'immagine di $SU(2)$ è un sottogruppo 3-dimensionale connesso di $SO^{\uparrow}(1,3)$ che contiene matrici che non agiscono sulla coordinata temporale; esso si puo identificare col gruppo $SO(3)$ delle rotazioni proprie. Ne segue che i gruppi $SO^{\uparrow}(1,3)$ e $SO(3)$ non sono semplicemente connessi e che i loro ricoprimenti universali sono rispettivamente $SL(2,\mathbf{C})$ ed $SU(2)$. Il ricoprimento universale del gruppo di Poincaré ristretto si ottiene rimpiazzando il gruppo di Lorentz ristretto con $SL(2,\mathbf{C})$ e la sua legge di composizione è

$$(y,a)(y',a') = (y + \Lambda(a)y', aa'). \tag{4.34}$$

Le trasformazione di Lorentz infinitesime sono del tipo $\Lambda = 1 + l$ con $l^T = -glg$. Pertanto, una trasformazioni infinitesima del gruppo di Poincaré si può rappresentare con matrici 5×5 del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & c^{-2}\vec{v}^{\,T} \\ \vec{y} & \vec{v} & \vec{\omega}\cdot\vec{r} \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

Per facilitare lo studio del limite non relativistico, abbiamo usato la coordinata temporale t al posto di x^0. Si vede che questa matrice che tende alla matrice (4.8) quando $c \to \infty$. Si può procedere come nel caso non relativistico e trovare i commutatori dei i vari generatori dell'algebra di Lie del gruppo di Poincaré. Esse differiscono da quelli del gruppo di Galilei solo per le due ultime relazioni dell'eq. (4.11), che vengono modificate come segue

$$[n^i, n^j] = -c^{-2}e^{ijk}m^k, \qquad [n^i, p^k] = -c^{-2}h\delta^{ik}. \tag{4.36}$$

Si vede che nel limite non relativistico, in cui la velocità della luce c si può considerare molto grande rispetto alle altre velocità in gioco, le costanti di struttura dell'algebra del gruppo di Poincaré tendono a quelle del gruppo di Galilei. Questo processo di limite è chiamato *contrazione*.

Se introduciamo le seguenti nuove notazioni per gli elementi di base dell'algebra di Lie

$$\begin{aligned} p_0 = p^0 = c^{-1}h, \qquad p_i = -p^i, \\ m_{ij} = e^{ijk}m^k, \qquad m_{k0} = -m_{0k} = cn^k, \end{aligned} \tag{4.37}$$

le relazioni di commutazione prendono la forma compatta

$$\begin{aligned} [p_\alpha, p_\beta] = 0, \qquad [m_{\alpha\beta}, p_\gamma] = g_{\beta\gamma}p_\alpha - g_{\alpha\gamma}p_\beta, \\ [m_{\alpha\beta}, m_{\gamma\delta}] = g_{\beta\gamma}m_{\alpha\delta} - g_{\beta\delta}m_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma}m_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}m_{\beta\gamma}, \end{aligned} \tag{4.38}$$

dove gli indici greci prendono i valori $0, 1, 2, 3$. Queste formule ci dicono che, rispetto alla rappresentazione aggiunta della sottoalgebra di Lorentz, gli elementi p_α si trasformano come componenti di un quadrivettore mentre gli elementi $m_{\alpha\beta}$ si trasformano come le componenti di un tensore antisimmetrico del secondo ordine.

L'argomento esposto nella sezione 2.3 mostra che per studiare i gruppi di coomologia basta considerare le cocatene invarianti per trasformazioni di Lorentz. Si vede immediatamente che non è possibile costruire cocatene non nulle di primo e di secondo grado. Ne segue che $H^1 = 0$ ed $H^2 = 0$, cioè, dal punto di vista fisico, le costanti arbitrarie dei generatori delle trasformazioni infinitesime possono essere fissate in maniera univoca e le rappresentazioni proiettive del gruppo di Poincaré ristretto si ottengono come rappresentazioni unitarie del suo ricoprimento universale.

Le relazioni di commutazione quantistiche che differiscono da quelle del gruppo di Galilei sono

$$[N^i, N^j] = -ic^{-2}e^{ijk}M^k, \qquad [N^i, P^k] = -ic^{-2}H\delta^{ik}. \tag{4.39}$$

L'insieme delle relazioni di commutazione quantistiche si puo scrivere in forma compatta se si introducono gli operatori P_α ed $M_{\alpha\beta}$ definiti in modo analogo ai corrispondenti elementi p_α ed $m_{\alpha\beta}$ dell'algebra di Lie.

Notiamo che l'operatore

$$m^2 = c^{-4}H^2 - c^{-2}\vec{P}^{\,2} = c^{-2}P^\alpha P_\alpha \tag{4.40}$$

commuta con tutti i generatori e dunque, se il sistema è elementare, è una costante (positiva o nulla, come vedremo nella Sezione 4.4). Si ha dunque, dato che H è un operatore positivo,

$$H = (m^2c^4 + c^2\vec{P}^{\,2})^{1/2} = mc^2 + \frac{1}{2m}\vec{P}^{\,2} + O(c^{-2}). \tag{4.41}$$

Si vede da questa formula che le relazioni di commutazione del gruppo di Poincaré (4.39) tendono a quelle del gruppo di Galilei nel limite $c \to \infty$. Si vede anche come il cociclo non banale nasca dall'energia di riposo relativistica mc^2.

È utile introdurre il quadrivettore di Pauli e Lubànski, le cui componenti sono gli operatori

$$S^\alpha = -\tfrac{1}{2}e^{\alpha\beta\gamma\delta}P_\beta M_{\gamma\delta}, \tag{4.42}$$

dove $e^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è il simbolo di Ricci quadridimensionale antisimmetrico rispetto a tutti gli indici con $e^{0123} = 1$. Esso ha la proprietà

$$[S^\alpha, P_\beta] = 0 \tag{4.43}$$

e si vede che $S^\alpha S_\alpha$ commuta con tutti gli operatori dell'algebra e dunque, per un sistema elementare, è una costante legata allo spin.

Anche nel caso relativistico, stati con momento angolare intero e semidispari sono separati da una regola di superselezione. Non esiste però una regola di superselezione per la massa, e si pone il problema di come essa nasce nell'approssimazione non relativistica. Ad una differenza di massa Δm corrisponde una differenza di energia Δmc^2, molto grande in confronto alle energie che compaiono in un sistema non relativistico. Nella dipendenza temporale della differenza di fase tra due stati di massa diversa compare dunque il fattore $\exp(-i\Delta mc^2\hbar^{-1}t)$ che varia molto rapidamente e rende inosservabili gli effetti di interferenza tra i due stati.

4.3 Tensori e spinori.

In questa Sezione descriviamo un metodo generale per costruire rappresentazioni a dimensione finita di $SL(2,\mathbf{C})$ (non necessariamente unitarie) e di $SU(2)$.

Iniziamo con alcune considerazioni che valgono per un gruppo qualunque $\mathcal{G}$ di matrici $N\times N$. Le rappresentazioni più semplici sono date da $D(A)=A$ e da $D(A)=(A^{-1})^T$. Se le matrici sono complesse, si posssono considerare anche le rappresentazioni complesse coniugate $D(A)=\overline{A}$ e $D(A)=(\overline{A}^{-1})^T=(A^{-1})^\dagger$. Altre rappresentazioni si possono ottenere dal *prodotto tensoriale* di queste. Le componenti dei vettori (tensori) sui quali operano queste rappresentazioni dipendono da un insieme di indici di vario tipo: *covarianti* (in basso), *controvarianti* (in alto), *puntati* e *non puntati*. Su questi indici agiscono le matrici sopra elencate nel seguente modo:

$$[D(A)T]^{a\cdots\dot{c}\cdots}_{b\cdots\dot{d}\cdots}=A^a{}_e\cdots(A^{-1})^f{}_b\cdots\overline{A}^{\dot{c}}{}_{\dot{g}}\cdots(\overline{A}^{-1})^{\dot{h}}{}_{\dot{d}}\cdots T^{e\cdots\dot{g}\cdots}_{f\cdots\dot{h}\cdots}. \tag{4.44}$$

Usiamo sempre la convenzione di Einstein secondo la quale è sottintesa una sommatoria sugli indici che compaiono due volte (in alto ed in basso). Naturalmente, se $\mathcal{G}$ è un gruppo di matrici reali non occorre introdurre indici puntati. Il numero di indici è l'*ordine* del tensore. I tensori di ordine zero sono *scalari*, cioè invarianti.

Se le matrici del gruppo $\mathcal{G}$ non hanno la proprietà $\det A=1$, una classe più generale di rappresentazioni si ottiene introducendo nel secondo membro di questa equazione ulteriori fattori costituiti da potenze di $\det A$ o di $|\det A|$ o, se si tratta di matrici complesse, anche di $\overline{\det A}$. Si ottengono così delle *densità tensoriali*. Se $\mathcal{G}=O(N,M)$ (un gruppo pseudo-ortogonale reale), si ha $\det A=\pm1$ e le uniche densità tensoriali interessanti sono gli *pseudotensori*, nella cui proprietà di trasformazione compare il fattore $\det A$.

Sommando, componente per componente, due tensori con indici eguali e dello stesso tipo si ottiene un altro tensore dello stesso ordine. Moltiplicando le componenti di due tensori con indici arbitrari si ottiene un altro tensore il cui ordine è la somma degli ordini dei due tensori di partenza. Eguagliando un indice covariante ed un indice controvariante dello stesso tipo (entrambi puntati o non puntati) e sommando su tutti i valori dell'indice, si ottiene un altro tensore di ordine diminuito di due. Infatti si ha, per esempio,

$$A^a{}_b(A^{-1})^c{}_aT^b_c=T^a_a. \tag{4.45}$$

Queste operazioni, *somma*, *prodotto* e *contrazione*, costituiscono il calcolo tensoriale per un gruppo di matrici qualunque. Nel caso complesso, le complesse coniugate delle componenti di un tensore sono le componenti di un altro tensore in cui gli indici non puntati diventano puntati e viceversa.

Si vede facilmente che se le componenti di un tensore sono date da δ^a_b o da $\delta^{\dot a}_{\dot b}$, esse non cambiano quando si esegue una trasformazione del gruppo $\mathcal{G}$. In altre parole, esse definisicono tensori *invarianti*. Per particolari gruppi di matrici esistono anche altri tensori invarianti. Dato un tensore, si possono ottenere dei nuovi tensori moltiplicando per un tensore invariante e contraendo coppie di indici.

Se $\mathcal{G} = O(N, M)$ è un gruppo di matrici ortogonali o pseudo-ortogonali, i suoi elementi A hanno le proprietà (tra di loro equivalenti)

$$A^T g A = g, \qquad A g^{-1} A^T = g^{-1}, \tag{4.46}$$

dove g è una matrice diagonale con elementi eguali a ± 1 o, più in generale, una matrice reale simmetrica non degenere. Queste equazioni significano che i tensori g_{ab} e $(g^{-1})^{ab}$ sono invarianti. Se il gruppo è complesso, si possono anche considerare i tensori puntati $g_{\dot a \dot b}$ e $(g^{-1})^{\dot a \dot b}$ con le stesse componenti dei corrispondenti tensori non puntati.

Questi tensori invarianti si possono usare, moltiplicando e contraendo, per innalzare o abassare indici puntati o non puntati. Infatti, dalle formule

$$(A^{-1})^T = g A g^{-1}, \qquad (A^{-1})^\dagger = g \overline{A} g^{-1} \tag{4.47}$$

si vede che le rappresentazioni di $\mathcal{G}$ che agiscono su indici covarianti e controvarianti sono equivalenti. Osservazioni del tutto simili si possono fare se $\mathcal{G} = Sp(2n)$ è un gruppo simplettico, nel qual caso la matrice g è reale, antisimmetrica e non degenere.

Se $\mathcal{G} = U(N, M)$ è un gruppo unitario o pseudounitario, valgono le condizioni (tra di loro equivalenti)

$$A^\dagger g A = g, \qquad A g^{-1} A^\dagger = g^{-1}. \tag{4.48}$$

dove g è una matrice reale simmetrica non degenere. Questo significa che i tensori $g_{\dot a b}$ e $(g^{-1})^{a \dot b}$ sono invarianti.

Consideriamo ora l'espressione $\epsilon^{a_1 \cdots a_N}$ antisimmetrica rispetto a tutti gli N indici e normalizzata in modo che $\epsilon^{1 \cdots N} = 1$. Dalla definizione del determinante $\det A$ si ha

$$A^{a_1}{}_{b_1} \cdots A^{a_N}{}_{b_N} \epsilon^{b_1 \cdots b_N} = \det A \; \epsilon^{a_1 \cdots a_N}. \tag{4.49}$$

Questa equazione mostra che $\epsilon^{a_1 \cdots a_N}$ è uno pseudo-tensore invariante. Esiste anche un analogo pseudo-tensore invariante covariante e, se il gruppo è complesso, i corrispondenti pseudo-tensori invarianti puntati (nella loro legge di trasformazione appare $\overline{\det A}$). Se $\mathcal{G}$ è un gruppo di matrici unimodulari, cioè con $\det A = 1$, non c'e distinzione tra tensori e pseudotensori. In tal caso, per $N = 2$, ϵ_{ab} è un tensore invariante antisimmetrico del secondo ordine. Ne segue che in due dimensioni le matrici unimodulari sono anche simplettiche, cioè $SL(2, \mathbf{C}) = Sp(2, \mathbf{C})$ e $SL(2, \mathbf{R}) = Sp(2, \mathbf{R})$.

Le rappresentazioni che operano sugli spazi tensoriali sopra definiti non sono necessariamente irriducibili. Per esempio, un tensore del secondo ordine con indici dello stesso tipo si può decomporre in una parte simmetrica ed una parte antisimmetrica che si trasformano separatamente:

$$T_{ab} = \tfrac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}) + \tfrac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}). \tag{4.50}$$

Un tensore misto del secondo ordine si può decomporre nel seguente modo

$$T^a_b = \tfrac{1}{N} T^c_c \delta^a_b + \tilde{T}^a_b, \qquad \tilde{T}^c_c = 0, \tag{4.51}$$

in una parte proporzionale a δ^a_b ed una parte a traccia nulla. Imponendo condizioni di simmetria e l'annullarsi di tutte le contrazioni con tensori invarianti, si possono definire spazi di tensori irriducibili, nei quali operano rappresentazioni irriducibili di $\mathcal{G}$.

Applichiamo ora il formalismo generale sopra esposto al gruppo $SL(2, \mathbf{C})$. In questo caso i tensori prendono il nome di *spinori* e gli indici si possono alzare ed abbassare per mezzo degli spinori invarianti antisimmetrici $\epsilon^{ab} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = -\epsilon_{ab} = -\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$. Possiamo dunque limitarci a considerare spinori controvarianti.

Se uno spinore è irriducibile, devono annullarsi tutte le sue contrazioni con gli spinori invarianti antisimmetrici sopra nominati e ne segue che esso deve essere completamente simmetrico separatamente in tutti gli indici puntati e non puntati. Si dimostra che in questo modo si ottengono tutte le rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali di $SL(2, \mathbf{C})$. Seguendo la notazione tradizionale in fisica, indichiamo con il simbolo $D^{(j',j'')}$ la rappresentazione che opera in uno spazio di spinori simmetrici con $2j'$ indici non puntati e $2j''$ indici puntati. I parametri j', j'' possono assumere tutti i valori interi o semiinteri non negativi e lo spazio così ottenuto ha dimensione $(2j'+1)(2j''+1)$.

Nella eq. (4.29) abbiamo rappresentato un quadrivettore x^α per mezzo di una matrice $\hat{x}$ che sotto l'azione di un elemento $A \in SL(2, \mathbf{C})$ si trasforma nella matrice $A\hat{x}A^\dagger$. Questo significa che gli elementi $x^{a\dot{b}}$ di questa matrice sono le componenti di uno spinore misto del secondo ordine e dunque la eq. (4.29) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra quadrivettori e spinori misti del secondo ordine. Essa si può anche scrivere nella forma

$$x^{a\dot{b}} = x^\alpha \sigma_\alpha^{a\dot{b}}, \tag{4.52}$$

dove l'espressione $\sigma_\alpha^{a\dot{b}}$, costruita con le matrici di Pauli e la matrice unità, è invariante quando si agisce sugli indici spinoriali con la matrice $A \in SL(2, \mathbf{C})$ e con la complessa coniugata $\overline{A}$, mentre sull'indice quadri-vettoriale α agisce la corrispondente matrice di Lorentz $(\Lambda(A^{-1}))^T$.

Se si indica con ϵ la matrice antisimmetrica con componenti ϵ_{ab}, si controlla facilmente che le matrici di Pauli hanno la proprietà

$$\epsilon\sigma_\alpha\epsilon^T = -\sigma_\alpha^T, \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{4.53}$$

Ne segue l'identità

$$\sigma_\alpha^{a\dot{b}}\sigma_{\beta a\dot{b}} = \mathrm{Tr}(\sigma_\alpha\epsilon\sigma_\beta^T\epsilon^T) = 2g_{\alpha\beta}, \tag{4.54}$$

che permette di invertire la eq. (4.52) nel seguente modo

$$x_\alpha = \tfrac{1}{2}\sigma_{\alpha a\dot{b}}x^{a\dot{b}}. \tag{4.55}$$

Un procedimento simile permette di agire su espressioni con vari indici trasformando coppie di indici spinoriali (uno puntato ed uno no) in indici quadri-vettoriali e viceversa. Uno spinore con indici puntati e non puntati in numero eguale è dunque equivalente ad un tensore lorentziano. Se uno spinore è di ordine totale pari, è sempre possibile pareggiare il numero di indici puntati e non puntati moltiplicando per un numero sufficiente di spinori invarianti ϵ.

Ad esempio, dagli spinori simmetrici η_{ab} e $\chi_{\dot{a}\dot{b}}$ si ottengono i tensori

$$F_{\alpha\beta}^{(+)} = \sigma_\alpha^{a\dot{b}}\sigma_\beta^{c\dot{d}}\eta_{ac}\epsilon_{\dot{b}\dot{d}} = \mathrm{Tr}(\eta\sigma_\alpha\epsilon\sigma_\beta^T), \tag{4.56}$$

$$F_{\alpha\beta}^{(-)} = \sigma_\alpha^{a\dot{b}}\sigma_\beta^{c\dot{d}}\chi_{\dot{b}\dot{d}}\epsilon_{ac} = \mathrm{Tr}(\chi\sigma_\alpha^T\epsilon\sigma_\beta) \tag{4.57}$$

Si vede facilmente che essi sono antisimmetrici e si può verificare direttamente che essi soddisfano alle condizioni

$$\tfrac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}F_{\gamma\delta}^{(\pm)} = \pm iF_{\alpha\beta}^{(\pm)}. \tag{4.58}$$

Lo spazio dei tensori antisimmetrici complessi non è dunque irriducibile per trasformazioni di Lorentz, ma si decompone in due sottospazi invarianti definiti dalle condizioni sopra scritte. Esse definiscono i tensori antisimmetrici auto-duali ed anti-auto-duali, che corrispondono agli spinori simmetrici non puntati e puntati. Nello spazio dei tensori antisimmetrici del secondo ordine opera dunque una rappresentazione riducibile equivalente a $D^{(1,0)} \oplus D^{(0,1)}$.

Consideriamo ora il sottogruppo $SU(2) \subset SL(2,\mathbf{C})$. Siccome i suoi elementi soddisfano la condizione $A = (A^{-1})^\dagger$, il corrispondente calcolo spinoriale non distingue tra indici covarianti puntati ed indici controvarianti non puntati e neppure tra indici covarianti non puntati ed indici controvarianti puntati. Inoltre gli indici possono essere alzati ed abassati per mezzo degli spinori invarianti ϵ. Dunque si può limitarsi a considerare indici di un solo tipo (controvariante non puntato). Le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ sono finito-dimensionali ed unitarie (questa è una caratteristica dei gruppi compatti). Le indicheremo con il simbolo R^s dove s è intero o semi-intero non negativo. Esse hanno dimensione $2s+1$ ed operano su spinori simmetrici di ordine $2s$. R^s coincide con la restrizione di $D^{(s,0)}$ ad $SU(2)$ ed è unitariamente equivalente alla sua complessa coniugata $\overline{R}^s$ che coincide con la restrizione di $D^{(0,s)}$.

Più in generale, si dimostra che la rappresentazione $D^{(j',j'')}$ di $SL(2,\mathbf{C})$ ristretta ad $SU(2)$ è unitariamente equivalente alla somma diretta

$$R^{|j'-j''|} \oplus R^{|j'-j''|+1} \oplus \cdots \oplus R^{j'+j''}. \tag{4.59}$$

4.4 Le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré.

Una trattazione completa delle rappresentazioni unitarie del ricoprimento universale del gruppo di Poincaré ($SL(2, \mathbf{C})$ disomogeneo) è stata data da Wigner [43] nel 1939. È sottinteso che si parla di rappresentazioni continue. Particolare importanza ha la determinazione delle rappresentazioni unitarie irriducibili (r.u.i.), sia perchè le altre rappresentazioni unitarie si decompongono in integrale diretto di r.u.i., sia perchè le r.u.i. descrivono gli stati ad una particella. Il procedimento usato da Wigner è stato generalizzato da Mackey [49–51] nella sua teoria dei sistemi di imprimitività e delle rappresentazioni indotte già descritta nella Sezione 3.2 ed esso può essere applicato ad altri prodotti semidiretti localmente compatti, come abbiamo visto nella Sezione 3.3. In questa Sezione applichiamo i risultati di questa trattazione generale al caso in cui $\mathcal{G}$ è il ricoprimento universale del gruppo di Poincaré, $\mathcal{T} = \mathbf{R}^4$ è il gruppo delle traslazioni spazio-temporali e $\mathcal{R}$ è il gruppo $SL(2, \mathbf{C})$.

Lo spazio $\hat{\mathcal{T}}$ dei caratteri di $\mathcal{T}$ si può identificare con lo spazio dei quadri-impulsi e scrivere

$$k(x) = \exp(ik \cdot x), \qquad k \cdot x = k^T g x = k_\alpha x^\alpha. \tag{4.60}$$

Sia k che x si trasformano come quadrivettori rispetto a $SL(2, \mathbf{C})$ e dunque si può porre $\hat{\Lambda}(a) = \Lambda(a)$.

L'azione di $SL(2, \mathbf{C})$ sullo spazio $\hat{\mathcal{T}}$ dei quadri-impulsi non è transitiva ed $\hat{\mathcal{T}}$ si può decomporre in *orbite*. Se si indica con q un suo elemento rappresentativo, un'orbita è composta da tutti gli elementi del tipo $k = \Lambda(a)q$, $a \in SL(2, \mathbf{C})$. Scegliendo opportunamente i vettori rappresentativi q, si trovano le seguenti classi di orbite

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & k = 0, & q = (0,0,0,0), \\
\text{b)} & k \cdot k = 0, \quad k^0 > 0, & q = (1,0,0,1), \\
\text{c)} & k \cdot k = 0, \quad k^0 < 0, & q = (-1,0,0,-1), \\
\text{d)} & k \cdot k = m^2 > 0, \quad k^0 > 0, & q = (m,0,0,0), \\
\text{e)} & k \cdot k = m^2 > 0, \quad k^0 < 0, & q = (-m,0,0,0), \\
\text{f)} & k \cdot k = -m^2 < 0, & q = (0,0,0,m).
\end{array} \tag{4.61}$$

Su ogni orbita S esiste una misura positiva μ invariante rispetto all'azione di

$SO^{\uparrow}(1,3)$ cioè tale che

$$\int_S f(\Lambda k)\, d\mu(k) = \int_S f(k)\, d\mu(k), \qquad \Lambda \in SO^{\uparrow}(1,3). \tag{4.62}$$

Essa è banale nel caso a), nei casi b), c), d), e) si può scrivere nella forma

$$d\mu(k) = \delta(k \cdot k - m^2)\theta(\pm k^0)\, d^4k = |2k^0|^{-1}\, d^3\vec{k}, \tag{4.63}$$

dove θ è la funzione a scalino e nel caso f) si può porre

$$d\mu(k) = \delta(k \cdot k + m^2)\, d^4k. \tag{4.64}$$

Seguendo il procedimento descritto nel Capitolo 3, consideriamo il gruppo piccolo $H_q \subset SL(2, \mathbf{C})$ definito dalla condizione $\Lambda(a)q = q$ ed una sua r.u.i. $R(a)$. Scegliamo poi per ogni punto $k \in S$ l'elemento $a_k \in SL(2, \mathbf{C})$ con la proprietà $\Lambda(a_k)q = k$. La corrispondente r.u.i. di $\mathcal{G}$ è data da

$$[U(x,a)\phi](k) = \exp(ik \cdot x) R(a_k^{-1} a a_{k'})\phi(k'), \qquad k' = \Lambda(a^{-1})k, \tag{4.65}$$

che è unitaria rispetto alla norma

$$\|\phi\|^2 = \int_S \|\phi(k)\|^2\, d\mu(k). \tag{4.66}$$

Consideriamo ora in dettaglio le r.u.i. che corrispondono ai vari tipi di orbite. Osserviamo innanzitutto che l'energia k^0 è limitata inferiormente solo nei casi a), b), d). Solo le corrispondenti rappresentazioni possono dunque agire in uno spazio di Hilbert che rappresenta stati fisici. Se rappresentiamo il quadrivettore q per mezzo della matrice hermitiana

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} q^0 + q^3 & q^1 - iq^2 \\ q^1 + iq^2 & q^0 - q^3 \end{pmatrix} = q^\alpha \sigma_\alpha, \tag{4.67}$$

la condizione che determina il sottogruppo $H_q \in SL(2, \mathbf{C})$ si puo scrivere nella forma

$$a\hat{q}a^+ = \hat{q}. \tag{4.68}$$

Vediamo i singoli casi elencati nell'eq. (4.61):

a) Il gruppo piccolo H_q coincide con $SL(2,\mathbf{C})$ e le rappresentazioni (non fedeli) del gruppo inomogeneo sono sostanzialmente rappresentazioni di questo gruppo. Tutti i vettori dello spazio di Hilbert sono invarianti per traslazioni, cioè hanno energia e quantità di moto nulle. Esiste in natura solo uno stato con queste proprietà ed è il *vuoto*. Esso è pure invariante per trasformazioni di Lorentz omogenee e dunque corrisponde alla rappresentazione banale $R(a) = 1$ di $SL(2,\mathbf{C})$. Le altre rappresentazioni unitarie di $SL(2,\mathbf{C})$ sono infinito-dimensionali [58] e non corrispondono a stati fisici noti.

b) Si ha
$$\hat{q} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \tag{4.69}$$
ed H_q è il gruppo unitario $SU(2)$. Le r.u.i. di questo gruppo sono ben note dalla trattazione quantistica del momento angolare [36, 38]. Le chiameremo R^s con $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$; esse hanno dimensione $2s + 1$. Le corrispondenti rappresentazioni di $SL(2,\mathbf{C})$ disomogeneo descrivono particelle di massa positiva m e di spin s.

c) Il gruppo piccolo è ancora $SU(2)$, ma questo caso non ha interesse fisico diretto perchè riguarda stati con energia negativa.

d) Si ha
$$\hat{q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.70}$$
ed H_q è il gruppo delle matrici dalla forma
$$a = \begin{pmatrix} \exp(-\frac{i}{2}\alpha) & z\exp(\frac{i}{2}\alpha) \\ 0 & \exp(\frac{i}{2}\alpha) \end{pmatrix} \tag{4.71}$$
con α reale e z complesso (il fattore di fase che moltiplica z è stato introdotto per convenienza). Se si indica l'elemento a con la notazione abbreviata (z, α), la legge di composizione prende la forma
$$(z, \alpha)(z', \alpha') = (z + \exp(-i\alpha)z', \alpha + \alpha'), \tag{4.72}$$
che è quella del prodotto semidiretto delle rotazioni e delle traslazioni del piano complesso, ovvero del gruppo euclideo $E(2)$. Notiamo tuttavia che si ha $0 \leq \alpha < 4\pi$ e che due matrici a che differiscono per il

segno corrispondono allo stesso elmento di $E(2)$. È dunque più corretto affermare che nel caso che stiamo considerando il gruppo piccolo H_q è un ricoprimento doppio di $E(2)$, che si potrebbe chiamare "$U(1)$ disomogeneo". Le sue r.u.i. si trovano con il metodo descritto nella Sezione 3.3. Quelle che corrispondono all'orbita che contiene solo l'origine sono sostanzialmente le r.u.i. unidimensionali di $U(1)$ date da

$$R^{\lambda}(a) = \exp(-i\lambda\alpha), \qquad \lambda = 0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm 1, \ldots \tag{4.73}$$

Le corrispondenti r.u.i. di $SL(2, \mathbf{C})$ disomogeneo descrivono particelle di massa nulla ed elicità λ. L'interpretazione fisica dell'elicità è la proiezione del momento angolare nella direzione del moto della particella. Le altre r.u.i. di H_q sono infinito-dimensionali e descriverrebbero particelle di massa nulla con infiniti stati di elicità, che non sono state osservate in natura.

e) Il gruppo H_q è ancora $U(1)$ disomogeneo, ma questo caso non ha interesse fisico diretto perchè riguarda stati con energia negativa.

f) In questo caso si ha

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \tag{4.74}$$

ed il gruppo H_q coincide col gruppo pseudounitario $SU(1,1)$ localmente isomorfo al gruppo di Lorentz ristretto tridimensionale $SO^{\uparrow}(1,2)$. Esso ha la r.u.i. unidimensionale $R = 1$ e tutte le altre hanno dimensione infinita [59]. In ogni caso, l'energia non è limitata inferiormente e dunque non si ha una interpretazione in termini di stati fisici.

4.5 Le rappresentazioni proiettive del gruppo di Galilei.

Le r.u.i. delle estensioni centrali del gruppo di Galilei forniscono una classificazione delle particelle libere non relativistiche. Consideriamo dunque il gruppo delle matrici del tipo (4.15), ma, per ottenere una trattazione simile a quella della Sezione precedente, poniamo $m = 1$. La legge di composizione si può scrivere nella forma

$$(\eta, \tau, \vec{y}, \vec{v}, u)(\eta', \tau', \vec{y'}, \vec{v'}, u') =$$

$$= (\eta + \eta' - \vec{v} \cdot R(u)\vec{y'} - \tfrac{1}{2}\vec{v}^{\,2}\tau', \tau + \tau', \vec{y} + \vec{v}\tau' + R(u)\vec{y'}, \vec{v} + R(u)\vec{v'}, uu'). \quad (4.75)$$

La massa m viene reintrodotta considerando rappresentazioni con la proprietà

$$U(\eta, 0, \vec{0}, \vec{0}, 1) = \exp(-im\eta). \quad (4.76)$$

Notiamo che il gruppo considerato è il prodotto semidiretto del sottogruppo normale abeliano $\mathcal{T}$ composto dagli elementi del tipo $(\eta, \tau, \vec{y}, \vec{0}, 1) = (\eta, \tau, \vec{y})$ e del sottogruppo $\mathcal{R}$ composto dagli elementi del tipo $(0, 0, \vec{0}, \vec{v}, u) = (\vec{v}, u)$. Possimo dunque usare anche questa volta il metodo esposto nel Capitolo 3. L'azione di $\mathcal{B}$ su $\mathcal{T}$ si può scrivere nella forma

$$\Lambda(\vec{v}, u)(\eta, \tau, \vec{y}) = (\vec{v}, u)(\eta, \tau, \vec{y})(\vec{v}, u)^{-1} =$$

$$= (\eta - \vec{v} \cdot R(u)\vec{y} - \tfrac{1}{2}\vec{v}^{\,2}\tau, \tau, \vec{v}\tau + R(u)\vec{y}). \quad (4.77)$$

Scriviamo i caratteri di $\mathcal{T}$ nella forma

$$k(\eta, \tau, \vec{y}) = \exp(-im\eta + i\omega\tau - i\vec{k} \cdot \vec{y}). \quad (4.78)$$

L'azione di $\mathcal{B}$ su $\hat{\mathcal{T}}$ è data da

$$[\hat{\Lambda}(\vec{v}, u)k](\eta, \tau, \vec{y}) =$$

$$= \exp(-im\eta - im\vec{v} \cdot \vec{y} + \tfrac{i}{2}m\vec{v}^{\,2}\tau + i\omega\tau + iR(u)\vec{k} \cdot \vec{v}\tau - iR(u)\vec{k} \cdot \vec{y}). \quad (4.79)$$

ed introducendo la notazione $k = (m, \omega, \vec{k})$, si può scrivere

$$\hat{\Lambda}(\vec{v}, u)(m, \omega, \vec{k}) = (m, \omega', \vec{k'}), \quad (4.80)$$

dove

$$\begin{cases} \omega' = \omega + \vec{v} \cdot R(u)\vec{k} + \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}, \\ \vec{k'} = R(u)\vec{k} + m\vec{v}. \end{cases} \tag{4.81}$$

Queste sono le formule di trasformazione dell'energia e della quantità di moto per rotazioni e trasformazioni di Galilei pure. Consideriamo le orbite rispetto a questo gruppo di trasformazioni. Notiamo che m è costante sulle orbite. Se m è negativo, non esistono orbite con l'energia ω limitata inferiormente. Se $m = 0$, l'energia è limitata inferiormente solo sulle orbite costituite da un solo punto dato da $\vec{k} = 0$ ed ω costante; queste orbite rappresentano sistemi che non si evolvono nel tempo, per esempio lo spazio vuoto. L'unico caso interessante è dunque quello in cui m è positivo; in tal caso le orbite sono date da equazioni del tipo

$$\omega = \frac{1}{2m}\vec{k}^{\,2} + V, \tag{4.82}$$

dove V è una costante, fisicamente irrilevante, aggiunta all'energia ω, che risulta limitata inferiormente.

La misura invariante sull'orbita è semplicemente $d^3\vec{k}$. Come elemento rappresentativo dell'orbita possiamo scegliere il punto $(m, \omega, \vec{k}) = (m, V, \vec{0})$ ed il gruppo piccolo è composto dagli elementi $(\vec{0}, u)$ con $u \in SU(2)$. Le r.u.i. del gruppo piccolo sono le ben note rappresentazioni di dimensione $(2s+1)$ indicate con $R^s(u)$. La forma esplicita della rappresentazione indotta è

$$[U(\eta, \tau, \vec{y}, \vec{v}, u)\tilde{\psi}](\vec{k}) =$$

$$= \exp(-im\eta + i\omega\tau - i\vec{k} \cdot \vec{y})R^s(u)\tilde{\psi}(R(u^{-1})(\vec{k} - m\vec{v})). \tag{4.83}$$

La norma è data da

$$\|\tilde{\psi}\|^2 = \int \|\tilde{\psi}(\vec{k})\|^2 \, d^3\vec{k}. \tag{4.84}$$

La trasformata di Fourier

$$\psi(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x})\tilde{\psi}(\vec{k}) \, d^3\vec{k} \tag{4.85}$$

è la funzione d'onda nello spazio delle coordinate. Dall'equazione (4.82) segue che essa soddisfa all'equazione di Schrödinger con potenziale costante

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\Delta\psi + V\psi \tag{4.86}$$

La norma si può mettere nella forma

$$\|\psi\|^2 = \|\tilde{\psi}\|^2 = \int \|\psi(t,\vec{x})\|^2 \, d^3\vec{x} \tag{4.87}$$

e gli operatori del gruppo agiscono nel seguente modo

$$[U(\eta,\tau,\vec{y},\vec{0},1)\psi](t,\vec{x}) = \exp(-im\eta)\psi(t-\tau,\vec{x}-\vec{y}). \tag{4.88}$$

$$\begin{gathered}[U(0,0,\vec{0},\vec{v},u)\psi](t,\vec{x}) = \\ = \exp(im\vec{v}\cdot\vec{x} - \tfrac{1}{2}im\vec{v}^2 t)R^s(u)\psi(t,R(u^{-1})(\vec{x}-t\vec{v})).\end{gathered} \tag{4.89}$$

Da queste formule si ricavano facilmente i generatori delle trasformazioni infinitesime, per esempio

$$P^i = -i\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{4.90}$$

$$N^i = -mx^i - it\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{4.91}$$

Gli operatori di posizione $X^i(0)$, definiti dalla (4.17) sono gli operatori di moltiplicazione

$$[X^i(0)\psi](0,x) = x^i\psi(0,x). \tag{4.92}$$

Questi sono operatori nello schema di Heisenberg a $t=0$, ovvero operatori indipendenti dal tempo nello schema di Schrödinger.

4.6 Equazioni d'onda relativistiche.

Vogliamo ora rappresentare i vettori su cui operano le r.u.i. del gruppo $SL(2, \mathbf{C})$ disomogeneo per mezzo di funzioni d'onda nello spazio-tempo di Minkowski, che soddisfano opportune equazioni d'onda. È noto che l'interpretazione di queste funzioni d'onda in termini di localizzazione delle relative particelle presenta delle difficoltà, e che una trattazione coerente richiede l'introduzione di campi quantizzati, che descrivono stati con un numero arbitrario di particelle. I metodi esposti nel seguito possono essere usati con qualche modifica per la costruzione di campi quantizzati liberi locali a partire dagli operatori di creazione e di distruzione [60].

In analogia con la trattazione non relativistica, dobbiamo considerare la trasformata di Fourier della funzione d'onda nello spazio degli impulsi definita nella Sezione 4.4. Per indicare che si tratta della funzione d'onda nello spazio degli impulsi, nel seguito la indichiamo con $\tilde{\phi}(k)$. Essa è definita sull'orbita

$$k^0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^{\,2}} \tag{4.93}$$

e per ottenere un formalismo relativisticamente covariante si deve definire la trasformata di Fourier usando la misura invariante (4.63). Se consideriamo dapprima una particella di massa positiva o nulla e di spin (o elicità) zero, possiamo introdurre la funzione d'onda scalare

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \tilde{\phi}(k) \exp(-ik \cdot x)\, |2k^0|^{-1}\, d^3\vec{k} =$$

$$= (2\pi)^{-3/2} \int \tilde{\phi}(k) \exp(-ik \cdot x) \theta(k^0) \delta(k \cdot k - m^2)\, d^4k. \tag{4.94}$$

Si vede immediatamente che essa soddisfa l'equazione di Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\phi = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \phi + m^2 \phi = 0. \tag{4.95}$$

Questa equazione equivale a richiedere che la trasformata di Fourier quadridimensionale della funzione d'onda sia una misura con supporto contenuto nella superficie $k \cdot k = m^2$. Non dovremo però considerare tutte le soluzioni di questa equazione, ma solo quelle la cui trasformata di Fourier ha supporto nell'orbita (4.93) in cui l'energia k^0 è positiva, cioè le soluzioni ad energia positiva.

Dalla formula di Wigner (4.65), che nel caso considerato prende la forma semplice

$$[U(y,a)\tilde{\phi}](k) = \exp(ik \cdot y)\tilde{\phi}(\Lambda(a^{-1})k), \tag{4.96}$$

si trova con qualche calcolo la proprietà di trasformazione

$$[U(y,a)\phi](x) = \phi(L(a)^{-1}(x-y)). \tag{4.97}$$

Si noti che la funzione d'onda trasformata nel punto x dipende solo dalla funzione d'onda originale nel punto $L(a)^{-1}(x-y)$, cioè la proprietà di trasformazione è *locale*.

Quando si prova a ripetere questo procedimento per spin od elicità non nulli, si trova che la dipendenza da k dell'operatore $R(a_k^{-1}aa_{k'})$, che compare nella formula di Wigner (4.65) complica eccessivamente la proprietà di trasformazione della funzione d'onda $\phi(x)$ e la rende non locale. Un espediente che permette di evitare queste difficoltà consiste nell'estendere la rappresentazione R del gruppo piccolo H_q ad una rappresentazione (non unitaria) D di tutto il gruppo $SL(2,\mathbf{C})$. Come vedremo, talvolta è necessario scegliere una rappresentazione D di dimensione maggiore di quella di R, cioè introdurre nuove componenti "non fisiche" della funzione d'onda $\tilde{\phi}(k)$. Si dovrà allora richiedere che la rappresentazione D ristretta al sottogruppo H_q abbia un sottospazio invariante $\mathcal{K}$ tale che

$$D(a)\tilde{\phi} = R(a)\tilde{\phi}, \qquad a \in H_q, \qquad \tilde{\phi} \in \mathcal{K}. \tag{4.98}$$

In tal caso, la formula (4.65) è equivalente alla formula

$$[U(y,a)\tilde{\phi}](k) = \exp(ik \cdot y)D(a_k^{-1}aa_{k'})\tilde{\phi}(k'), \tag{4.99}$$

con la condizione aggiuntiva che la funzione d'onda $\tilde{\phi}(k)$ deve appartenere al sottospazio invariante $\mathcal{K}$ su cui opera R.

Basta allora introdurre la nuova funzione d'onda

$$\hat{\phi}(k) = D(a_k)\tilde{\phi}(k), \tag{4.100}$$

che ha la proprietà di trasformazione

$$[U(y,a)\hat{\phi}](k) = \exp(ik \cdot y)D(a)\hat{\phi}(L(a)^{-1}k). \tag{4.101}$$

La sua trasformata di Fourier simile alla (4.94) ha la semplice proprietà di trasformazione locale

$$[U(y,a)\phi](x) = D(a)\phi(L(a)^{-1}(x-y)). \tag{4.102}$$

Consideriamo ora il caso di massa positiva e spin s. La rappresentazione R^s del gruppo piccolo $H_q = SU(2)$ può essere estesa a tutto $SL(2,\mathbf{C})$ senza aumentare la dimensione in due modi. Nel primo caso scegliamo la rappresentazione $D = D^{(s,0)}$ (vedi Sezione 4.3), che agisce sugli spinori simmetrici con $2s$ indici controvarianti non puntati per mezzo delle matrici a. Nel secondo caso scegliamo la rappresentazione $D = D^{(0,s)}$, che agisce sugli spinori simmetrici con $2s$ indici covarianti puntati per mezzo delle matrici $(a^{-1})^\dagger$ (nella Sezione 4.3 si è utilizzata una definizione equivalente che utilizza indici controvarianti puntati). Si noti che gli indici di $\tilde{\phi}$, che è uno spinore simmetrico di $SU(2)$, possono essere considerati indifferentemente come controvarianti non puntati o come covarianti puntati.

Consideriamo più in dettaglio il caso $s = \frac{1}{2}$. È conveniente usare entrambe le rappresentazioni $D^{(\frac{1}{2},0)}(a) = a$ e $D^{(0,\frac{1}{2})}(a) = (a^{-1})^\dagger$. Le corrispondenti funzioni d'onda (4.100) sono definite da

$$\tilde{\eta}(k) = a_k\tilde{\phi}(k), \qquad \tilde{\chi}(k) = (a_k^{-1})^\dagger\tilde{\phi}(k). \tag{4.103}$$

Ognuna di queste funzioni descrive completamente lo stato della particella e le loro trasformate di Fourier soddisfano all'equazione di Klein-Gordon.

Se si considerano entrambe le funzioni, si può scrivere una equazione d'onda che contiene solo derivate prime. Notiamo che la definizione $L(a_k)q = k$ si può scrivere nella forma

$$a_k\hat{q}a_k^\dagger = \hat{k} = k^\alpha\sigma_\alpha, \tag{4.104}$$

dove $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le matrici di Pauli, σ_0 è la matrice unità e $\hat{q}$ è definita dalla eq. (4.69). Segue che

$$a_k a_k^\dagger = m^{-1}\hat{k} \tag{4.105}$$

e dunque

$$\tilde{\eta}(k) = m^{-1}\hat{k}\tilde{\chi}(k) = m^{-1}(k^0 + \vec{k}\cdot\vec{\sigma})\tilde{\chi}(k). \tag{4.106}$$

Siccome si ha

$$(k^0 + \vec{k}\cdot\vec{\sigma})(k^0 - \vec{k}\cdot\vec{\sigma}) = m^2, \tag{4.107}$$

si ottengono le due equazioni

$$\begin{cases} (k^0 + \vec{k} \cdot \vec{\sigma})\tilde{\chi}(k) = m\tilde{\eta}(k), \\ (k^0 - \vec{k} \cdot \vec{\sigma})\tilde{\eta}(k) = m\tilde{\chi}(k). \end{cases} \tag{4.108}$$

Queste equazioni hanno soluzioni non nulle solo se $k \cdot k = m^2$. Introducendo le trasformate di Fourier si ha

$$\begin{cases} i(\partial^0 - \vec{\partial} \cdot \vec{\sigma})\chi(x) = m\eta(x), \\ i(\partial^0 + \vec{\partial} \cdot \vec{\sigma})\eta(x) = m\chi(x). \end{cases} \tag{4.109}$$

Introduciamo una funzione d'onda a quattro componenti che rappresentiamo con la matrice 4×1 a blocchi

$$\tilde{\psi}(k) = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}(k) \\ \tilde{\chi}(k) \end{pmatrix} \tag{4.110}$$

e le matrici 4×4, rappresentate a blocchi 2×2

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_k = -\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{4.111}$$

L'eq. (4.108) si può scrivere nella forma

$$\gamma^\alpha k_\alpha \tilde{\psi}(k) = m\tilde{\psi}(k) \tag{4.112}$$

ed introducendo la trasformata di Fourier si ottiene l'equazione di Dirac [6]

$$i\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi(x) = m\psi(x). \tag{4.113}$$

Si controlla facilmente che le matrici di Dirac (4.111) hanno le proprietà

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta}, \tag{4.114}$$

$$\gamma_\alpha^\dagger = \gamma^\alpha = g^{\alpha\beta}\gamma_\beta. \tag{4.115}$$

Si dimostra che queste proprietà caratterizzano le matrici di Dirac a meno di una trasformazione unitaria.

Nel caso di massa nulla ed elicità non nulla, se si vuole estendere la rappresentazione del gruppo piccolo a tutto $SL(2,\mathbf{C})$, è inevitabile l'introduzione di componenti non fisiche. Infatti, la rappresentazione R^λ del gruppo piccolo H_q, cioè di $U(1)$ disomogeneo, è unidimensionale, mentre l'unica rappresentazione unidimensionale di $SL(2,\mathbf{C})$ è quella banale, che descrive particelle di elicità nulla. Dobbiamo dunque innanzitutto studiare la restrizione delle rappresentazioni $D^{(j',j'')}$ introdotte nella Sezione 4.3 al gruppo piccolo e vedere se esse contengono delle rappresentazioni unitarie unidimensionali R^λ.

Notiamo che sugli indici controvarianti non puntati e puntati agiscono rispettivamente matrici del tipo (4.71) e le loro complesse coniugate. L'applicazione di queste matrici non può far aumentare il valore degli indici delle componenti non nulle di uno spinore (supponiamo che gli indici prendano i valori $1, 2$). Pertanto, gli spinori le cui componenti si annullano quando almeno uno degli indici vale 2, formano l'unico sottospazio invariante unidimensionale. Quando l'elemento (4.71) agisce su di uno spinore di questo tipo, la componente non nulla viene moltiplicata per un fattore $\exp(-\frac{i}{2}\alpha)$ per ogni indice non puntato e per un fattore $\exp(\frac{i}{2}\alpha)$ per ogni indice puntato. Confrontando con l'eq. (4.73), si vede che l'unica rappresentazione unidimensionale contenuta nella restrizione di $D^{(j',j'')}$ al gruppo piccolo $U(1)$ disomogeneo è la rappresentazione R^λ con

$$\lambda = j' - j''. \tag{4.116}$$

Questa relazione è dovuta a S. Weinberg [61].

L'equazione (4.70) mostra che lo spinore $q^{a\dot{b}}$ ha solo la componente $q^{1\dot{1}}$ non nulla e pertanto la sola componente non nulla dello spinore $q_{a\dot{b}}$ è $q_{2\dot{2}}$. Il sottospazio invariante sopra individuato si può dunque caratterizzare con le condizioni

$$q_{a\dot{c}}\tilde{\phi}^{a\cdots\dot{b}\cdots}(k) = 0, \qquad q_{c\dot{b}}\tilde{\phi}^{a\cdots\dot{b}\cdots}(k) = 0. \tag{4.117}$$

Siccome lo spinore $q_{a\dot{b}}$ è invariante per trasformazioni del gruppo piccolo, è chiaro che il sottospazio definito da queste equazioni è invariante rispetto allo stesso gruppo.

Le rappresentazioni più semplici che si possono usare per descrivere particelle di elicità λ sono $D^{(\lambda,0)}$ se $\lambda \geq 0$ e $D^{(0,-\lambda)}$ se $\lambda \leq 0$. Dato che l'elemento a_k trasforma lo spinore $q^{a\dot{b}}$ in $k^{a\dot{b}}$, dalla condizione (4.117) segue che le nuove funzioni d'onda definite dalla (4.100) devono soddisfare alle equazioni

$$k_{a\dot{b}}\tilde{\eta}^{a\cdots}(k) = 0, \qquad \lambda > 0, \tag{4.118}$$

$$k^{a\dot{b}}\tilde{\chi}_{\dot{b}\cdots}(k) = 0, \qquad \lambda < 0. \tag{4.119}$$

Queste equazioni hanno soluzioni non nulle solo se $\det \hat{k} = k\cdot k = 0$. Passando alle trasformate di Fourier ed introducendo la notazione

$$\partial^{a\dot{b}} = \sigma_{\alpha}^{a\dot{b}}\partial^{\alpha}, \tag{4.120}$$

si hanno infine le equazioni

$$\partial_{a\dot{b}}\eta^{a\cdots}(x) = 0, \tag{4.121}$$

$$\partial^{a\dot{b}}\chi_{\dot{b}\cdots}(x) = 0, \tag{4.122}$$

che descrivono, rispettivamente particelle con elicità positiva o negativa.

Nel caso di particlle di elicità $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, (neutrini), le funzioni d'onda hanno un solo indice spinoriale e le equazioni sopra scritte prendono il nomedi equazioni di Weyl. Dalla eq. (4.53) si ottiene

$$k_{a\dot{b}} = \epsilon_{ac}\epsilon_{\dot{b}\dot{d}}k^{c\dot{d}} = (k^0 - \vec{k}\vec{\sigma}^T)_{a\dot{b}}. \tag{4.123}$$

Con questa sostituzione, le equazioni di Weyl prendono la forma particolarmente significativa

$$(\partial^0 + \vec{\partial}\cdot\vec{\sigma})\eta(x) = 0. \tag{4.124}$$

$$(\partial^0 - \vec{\partial}\cdot\vec{\sigma})\chi(x) = 0, \tag{4.125}$$

Esse sono identiche alle (4.109) con $m = 0$ e pertanto se si pone $m = 0$ nell'equazione di Dirac si ottengono due equazioni di Weyl indipendenti per particelle di elicità $\pm\frac{1}{2}$.

Consideriamo ora particelle di massa nulla ed elicità $\lambda = \pm 1$ (fotoni). Le funzioni d'onda sono spinori simmetrici del secondo ordine, che si possono trasformare in tensori antisimmetrici auto-duali o anti-auto-duali $F^{(\pm)}$ per mezzo delle equazioni (4.56) e (4.57). Dalla (4.120) e dalle equazioni (4.121), (4.121), si vede che

$$\partial^{\alpha}F^{(+)}_{\alpha\beta} = \partial^{a\dot{b}}\sigma_{\beta}^{c\dot{d}}\eta_{ab}\epsilon_{\dot{b}\dot{d}} = 0 \tag{4.126}$$

ed una simile equazione per $F^{(-)}$. Usando anche la formula (4.58), le equazioni d'onda prendono la forma

$$\partial^{\alpha}F^{(\pm)}_{\alpha\beta} = 0, \qquad \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\alpha}F^{(\pm)}_{\beta\gamma} = 0, \tag{4.127}$$

cioè si ottengono le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti.